

Caractérisation de la projection du squelette d'une surface canal 3D : Application à la reconstruction 3D à partir de deux images

Bastien Durix¹, Géraldine Morin¹, Sylvie Chambon¹, Céline Roudet², Lionel Garnier²

¹ IRIT, UMR CNRS 5505, Université Paul Sabatier, 31000 Toulouse

² LE2I, UMR CNRS 6306, Université de Bourgogne, 21000 Dijon

Résumé

Nous présentons dans cet article une nouvelle approche pour reconstruire un objet 3D à partir de deux images de celui-ci. L'originalité de notre approche vient du fait que nous n'estimons pas directement la surface de l'objet 3D mais son squelette. Ce travail s'appuie sur les deux contributions suivantes. Premièrement, nous décrivons la relation existant entre un squelette 3D et sa projection, orthographique ou perspective, sur un plan image. Ensuite, nous montrons comment retrouver le squelette 3D à partir de deux de ses projections. Contrairement aux méthodes de reconstruction 3D classiques qui génèrent un nuage de points sans maillage, cette approche a pour avantage de reconstruire aussi la topologie de l'objet, c'est-à-dire d'en retrouver un maillage sans traitement annexe. Nous traitons ici des objets représentables par un squelette 3D curviligne et nous supposons aussi que les points de vue sont calibrés.

We present a novel approach to reconstruct a 3D object from several images corresponding to different viewpoints : we estimate here the object's skeleton instead of its surface. Our approach derives from two main contributions. First we describe the relation between a 3D skeleton and its orthographic or perspective projection. Then we show how to compute 3D skeleton from its projections. Unlike classical reconstruction methods, like structure-from-motion, this approach estimates the object's topology, that leads directly to surface computation. We assume that the objects are represented by curve skeletons and that the viewpoints are calibrated.

1. Introduction

Les squelettes ont été proposés comme outil pour extraire des informations de topologie d'une forme donnée [Blu67]. Par analogie avec le squelette d'un être vivant, il s'agit d'une représentation de la forme. Ce squelette, centré à l'intérieur de la forme, ne permet pas de la caractériser complètement : il faut ajouter, à chaque point du squelette, un rayon correspondant à une boule comprise dans la forme, telle que cette boule soit la plus grande possible. L'union de toutes ces boules permet de retrouver la forme. Le squelette, défini comme l'ensemble des centres associés aux rayons des boules, est donc un modèle de représentation des formes.

Nous proposons, dans cet article, une méthode de reconstruction 3D fondée sur l'utilisation des squelettes. L'idée ici vient du fait que reconstruire une forme 3D ou reconstruire son squelette sont deux problématiques équivalentes. En ef-

fet, l'opération de squelettisation (qui estime le squelette d'une forme) est une opération bijective. La réciproque de cette opération s'appelle l'habillage du squelette et permet de retrouver un maillage associé à un squelette donné.

Nous voulons donc estimer le modèle 3D d'un objet simple, à partir de deux images de cet objet, avec des points de vue calibrés. Quitte à donner des conditions sur l'objet à reconstruire, nous cherchons à estimer un maillage fermé, sans bruit, exploitable sans traitement annexe. L'idée est de proposer une reconstruction simplifiée d'un objet à partir de deux photos de celui-ci. Ceci permet, par exemple, d'estimer un maillage simplifié d'une figurine que l'on voudrait numériser.

Nous posons donc le problème suivant : comment faire pour retrouver une forme 3D \mathcal{S} à partir d'un ensemble de formes 2D, représentant la projection de \mathcal{S} selon diffé-

rents points de vue ? Nous pouvons appliquer les méthodes classiques de reconstruction, par exemple les méthodes de stéréovision où l'on peut apparier des points d'intérêt sur l'ensemble des images et ainsi, par triangulation, calculer leur position 3D. Ces méthodes sont précises, mais ne fournissent qu'un nuage de points sans topologie. Or nous voulons ici un modèle 3D de l'objet et un traitement supplémentaire est nécessaire pour l'obtenir. Une autre réponse possible à ce problème est la technique du *shape-from-silhouette* [Lau94, CBK03] permettant de retrouver un volume 3D sous la forme de voxels. Cette technique nécessite un ensemble d'images conséquent, de l'ordre de quelques dizaines, pour obtenir une reconstruction relativement précise. Nous proposons de résoudre la problématique en utilisant moins d'images, par l'utilisation d'un autre outil, le squelette.

Avant de commencer à aborder la résolution de notre problème, nous verrons dans un premier temps ce que sont les squelettes. Nous décrirons ensuite la relation existant entre un squelette 3D et sa projection orthographique ou perspective. Enfin, nous montrerons comment retrouver le squelette 3D à partir de ses deux projections. Notre algorithme sera ensuite testé sur des données de synthèse et des données réelles.

2. État de l'art

Squelette

Un squelette d'une forme 3D est un modèle de représentation de cette forme introduit par [Blu67]. L'idée est la suivante : considérons une boule B , comprise à l'intérieur d'une forme \mathcal{S} finie et fermée donnée, cette boule est dite maximale interne s'il n'existe aucune autre boule, à l'intérieur de la forme, contenant B . Cette propriété est équivalente à la tangence de B en au moins deux points du contour de \mathcal{S} . L'ensemble des centres des boules maximales internes définit l'axe médian interne de la forme \mathcal{S} . De la même façon, on peut définir les boules maximales externes à la forme, qui sont les boules maximales internes de son complémentaire. Il en découle l'existence d'un axe médian externe à la forme \mathcal{S} . L'union des axes médians interne et externe est l'axe médian de la forme. En couplant à chaque point de l'axe médian interne ou externe le rayon de la boule maximale associée, on obtient un modèle, permettant de retrouver la forme \mathcal{S} . En effet, la forme correspond à l'union des boules maximales internes à celle-ci, ou alors au complémentaire de l'union des boules maximales externes. Nous définissons le squelette S de la forme \mathcal{S} comme l'association des points de l'axe médian interne aux rayons maximaux correspondants : ce squelette, intérieur à la forme, est suffisant pour la caractériser complètement (cf. fig. 1).

L'opération de squelettisation permettant d'estimer un squelette à partir d'une forme donnée a été longuement étudiée depuis Blum, qui suggérait une approche par la méthode

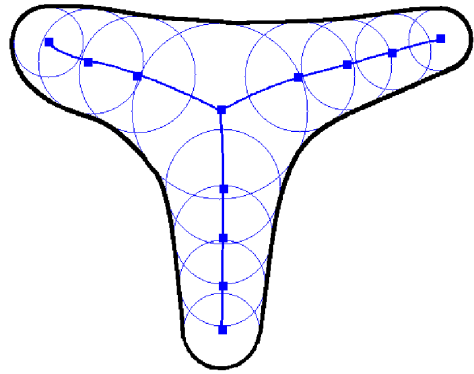


Figure 1: Un squelette est défini comme l'ensemble des centres des boules maximales, associés à leur rayons. Le squelette est représenté en bleu ici, avec un sous ensemble des boules maximales incluses dans la forme. Chaque boule maximale est tangente à la forme en au moins deux points.

dite du feu de prairie [Blu67]. L'idée est de faire se propager un "feu" depuis les bords de la forme. Le squelette correspond aux points de rencontre de plusieurs feux. Ceci a inspiré entre autres la technique dite d'amincissement, permettant d'extraire le squelette d'une forme 2D ou 3D, en l'érodant progressivement [Smi87, LLS92].

L'une des méthodes les plus connues pour la squelettisation s'appuie sur l'utilisation d'un diagramme de Voronoï et a été introduite par Ogniewicz [OI92]. Le principe consiste à calculer le diagramme de Voronoï d'un échantillonnage de points du contour et à récupérer les segments internes des cellules de Voronoï pour recomposer le squelette [Ede95, AM97]. Cette méthode est très utilisée, car elle permet aussi de retrouver le maillage associé à un nuage de points sans topologie, sous réserve d'un échantillonnage suffisamment dense [ACK01b, ACK01a].

L'opération réciproque de la squelettisation est l'opération d'habillage, qui permet de définir la surface de la forme associée à un squelette 2D ou 3D donné. De nombreuses méthodes existent pour résoudre ce problème, dépendant de la façon de décrire le squelette de l'objet. Certaines d'entre elles sont basées sur la représentation implicite de la forme à partir du squelette [RGF00, ZHC11]. D'autres méthodes reconstruisent le maillage à partir d'une représentation discrète du squelette, comme la méthode dite de *skin surface* [Ede99, KV05], ou la méthode proposée par Delamé [DRF12].

Surface canal

Dans cet article, nous allons étudier le squelette de type continu, représenté par une fonction de centre $C(t)$ et de rayon $r(t)$. Les squelettes continus sont un sous-ensemble

de la famille des surfaces canal, objets bien connus des mathématiciens.

Une surface canal est définie comme une enveloppe continue de sphères à un paramètre [PP97]. Tout comme pour le squelette, chaque sphère contribuant à la surface canal est tangente à celle-ci, le long d'un cercle appelé cercle caractéristique. Il est donc possible d'assimiler les squelettes 3D curvilignes à une surface canal, ne contenant aucune auto-intersection, auto-intersection qu'il est possible de détecter analytiquement [XFS06].

Plusieurs avantages sont amenés par l'assimilation du squelette à une surface canal. Premièrement, on peut l'habiller de façon explicite, à partir du moment où les fonctions $C(t)$ et $r(t)$ sont C^1 . En effet, un cercle caractéristique, contribution d'une sphère à la surface canal, se calcule à partir de l'intersection de la sphère de centre $C(t)$ et de rayon $r(t)$ avec un plan $\Pi(t)$ (cf. fig. 2), tel que :

$$\Pi(t) = \left\{ P \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{C(t)P} \cdot \overrightarrow{C'(t)} = r(t)r'(t) \right\} \quad (1)$$

Bien que ceci ne soit valable que pour les squelettes curvilignes, il est possible d'adapter l'algorithme d'estimation d'une surface canal pour calculer l'habillage d'un squelette de type surfacique [YFJ*02].

Notons aussi que les surfaces canal ont déjà été utilisées pour réaliser une reconstruction 3D. En effet, des travaux de Caglioti montrent qu'il est possible de reconstruire des objets tubulaires [CG06], ou encore la trajectoire d'une balle [CG09] à partir d'une image. En effet, en supposant que la surface canal à reconstruire possède un rayon constant, on peut la reconstruire à partir d'une seule projection.

Dans cet article, notre objectif est de reconstruire une surface canal 3D, en s'affranchissant la contrainte de rayon constant, en utilisant deux images, afin de reconstruire un plus large éventail de formes 3D. C'est pourquoi notre première contribution traitera de la relation existant entre une surface canal 3D et sa projection orthographique ou perspective. Nous montrerons qu'on peut estimer un squelette projectif à partir d'une forme 2D, représentant la projection d'une surface canal. Notre seconde contribution sera d'utiliser deux squelettes projectifs pour retrouver le squelette 3D de la surface canal, qui pourra ainsi être habillé pour retrouver la forme 3D.

3. Projection du squelette d'une surface canal

La première partie de notre raisonnement sera consacrée à l'étude des propriétés des projections orthographiques puis perspective d'une surface canal. Nous verrons tout d'abord que la projection orthographique du squelette d'une surface canal est le squelette de sa projection, sous certaines conditions. Ensuite, nous traiterons du cas de la projection perspective : nous montrerons que la projection perspective d'un

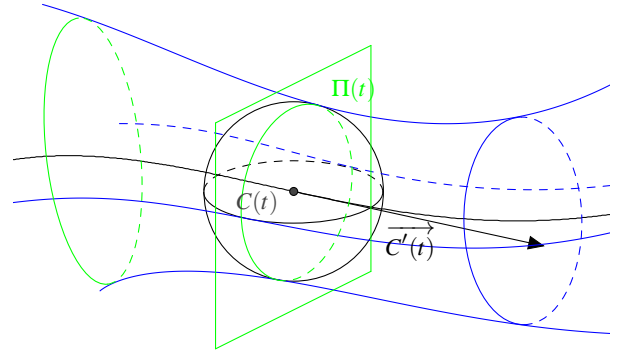


Figure 2: Illustration d'une surface canal, enveloppe à un paramètre de sphères : à chaque valeur du paramètre t correspond une sphère de centre $C(t)$ et de rayon $r(t)$. Cette enveloppe peut se calculer de manière exacte : en effet, pour chaque valeur du paramètre t , on peut calculer un plan $\Pi(t)$, normal à $\overrightarrow{C'(t)}$, dont l'intersection avec la sphère de centre $C(t)$ et de rayon $r(t)$ va donner le cercle caractéristique de la surface pour la valeur t (noté en vert). Ici, le plan $\Pi(t)$ contient le centre de la sphère, mais ce n'est le cas que si $r'(t)$ est nul.

squelette s'exprime en termes d'ellipses maximales à l'intérieur de la forme projetée, puis nous élaborerons une méthode pour estimer ces ellipses maximales.

3.1. Projection orthographique

Si nous effectuons une projection orthogonale d'une surface canal sur un plan donné, que pouvons-nous dire du squelette de la projection ? Nous allons montrer ici que sous certaines conditions, la projection du squelette correspond au squelette de la projection.

Pour que la projection du squelette soit le squelette de la projection, il faut que le cercle de projection de chaque sphère du squelette soit un cercle maximal dans la forme projetée. Or, dans une forme 2D donnée, un cercle est maximal s'il possède au moins deux points de tangence avec la frontière de la forme (cf. fig. 1). De plus, nous savons que la sphère est tangente à la frontière de la surface canal 3D en un cercle, appelé le cercle caractéristique. Les points de tangence entre le cercle de projection et la forme, s'ils existent, seront nécessairement compris sur la projection du cercle caractéristique (cf. fig. 3).

Le but de cette section est de montrer, dans un premier temps, dans quels cas on a au moins deux points d'intersec-

tion entre le cercle de projection et le cercle caractéristique, puis de vérifier que ces points d'intersection sont bien sur la frontière de la forme.

Soit une surface canal \mathcal{S} , modélisée par une fonction de centre $C(t)$ et une fonction de rayon $r(t)$ (cf. fig. 2) et un vecteur unitaire \vec{D} arbitraire. Nous définissons la projection orthogonale $\mathcal{S}_{\vec{D}} = p_{\vec{D}}(\mathcal{S})$ de la forme \mathcal{S} sur un plan orthogonal à \vec{D} .

Soit une sphère $\Sigma(t)$, de centre $C(t)$ et de rayon $r(t)$: cette sphère est déterminée par le squelette \mathcal{S} de la surface canal \mathcal{S} . Nécessairement, la projection de $\Sigma(t)$ est incluse dans la projection de la forme. Pour que la projection de la sphère appartienne au squelette de la projection, il faut que cette projection soit un cercle maximal, donc tangent à la projection de la forme en au moins deux points. Pour que le projeté d'un point P de la sphère $\Sigma(t)$ appartienne au bord de la projection, il faut satisfaire au moins deux conditions :

- P doit appartenir au bord de la forme 3D \mathcal{S} .
- La projection du point P doit appartenir au cercle de projection de $\Sigma(t)$.

Comme \mathcal{S} est une surface canal, la sphère $\Sigma(t)$ est tangente à \mathcal{S} en un cercle caractéristique $\mathcal{C}(t)$, intersection du plan $\Pi(t)$ (cf. eq. (1)) avec la sphère $\Sigma(t)$ (cf. fig. 2 et [PP97]).

Il nous faut définir à présent les points de $\Sigma(t)$ dont la projection est sur le cercle de projection. On peut montrer qu'un point P de la sphère est au bord de la projection si et seulement si $\vec{PC}(t) \perp \vec{D}$ (en effet, les points du contour de la projection sont ceux dont la normale est perpendiculaire à la direction de la vue). Le plan $\Pi_{\vec{D}}(t)$, orthogonal à \vec{D} et passant par $C(t)$, est tel que l'intersection de ce plan et de la sphère $\Sigma(t)$ définit les points du bord de la projection.

Nous venons donc d'énoncer des conditions nécessaires pour que la projection d'un point P appartienne au bord de la projection (cf. fig 3) :

$$P \in \Sigma(t) \cap \Pi(t) \cap \Pi_{\vec{D}}(t) \quad (2)$$

Le nombre de points dont la projection est sur le contour de la forme, qui correspond à l'intersection de deux cercles sur la surface de $\Sigma(t)$, dépend de conditions sur ces trois ensembles. Nous nous intéressons maintenant aux conditions nous donnant au moins deux points dans $\Sigma(t) \cap \Pi(t) \cap \Pi_{\vec{D}}(t)$: si ces conditions ne sont pas respectées, alors la projection d'une sphère maximale incluse dans la forme 3D ne sera pas un cercle maximal inclus dans la forme 2D.

La figure 4 nous montre les trois configurations possibles pour les positions relatives du cercle caractéristique et du cercle de projection. En plus des cas particuliers décrits sur cette figure, nous devons donc éviter les cas où la tangente à

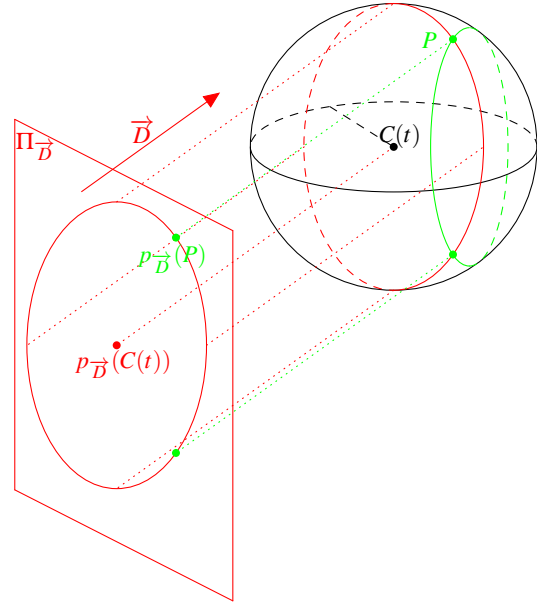


Figure 3: Considérons une sphère $\Sigma(t)$ extraite de la surface canal de la figure 2. Cette sphère est tangente à la surface canal en un cercle appelé cercle caractéristique (en vert). La projection de $\Sigma(t)$ sur $\Pi_{\vec{D}}$ est un disque, dont la frontière est un cercle. Les points de $\Sigma(t)$, dont la projection est sur la frontière du disque, sont situés sur un cercle de la sphère, appelé cercle de projection, centré en $C(t)$ (en rouge). L'intersection des deux cercles représente l'ensemble des points de $\Sigma(t)$ dont la projection est sur la frontière de la projection de la forme : dans le cas présent, la projection du point P va donc appartenir à la frontière de la projection de la surface canal.

$C(t)$ est colinéaire à \vec{D} : en effet, dans ce cas, le cercle caractéristique de la sphère ne sera pas sur le bord de la forme. Il existe cependant un cas où $r'(t)$ s'annule, auquel cas les deux cercles seront confondus : en effet, si $r'(t)$ s'annule, le plan $\Pi(t)$ contiendra le centre de la sphère (c'est le cas d'un cylindre, qui est un type particulier de surface canal).

Quand ces conditions sont respectées, nous avons au moins deux points dans l'ensemble $\Sigma(t) \cap \Pi(t) \cap \Pi_{\vec{D}}(t)$. Cependant, même en respectant ces conditions, il reste un cas particulier où les projections des points de cet ensemble ne sont pas au bord de la forme. En effet, si une partie de la forme est cachée par elle-même, une partie de la projection de sa frontière ne sera pas connue. Pire encore, une différence de topologie peut apparaître sur la projection. Il nous faut donc éviter les auto-occultations de la forme du point de vue considéré.

Nous venons donc d'énoncer les conditions pour que la projection du squelette d'une surface canal soit le squelette

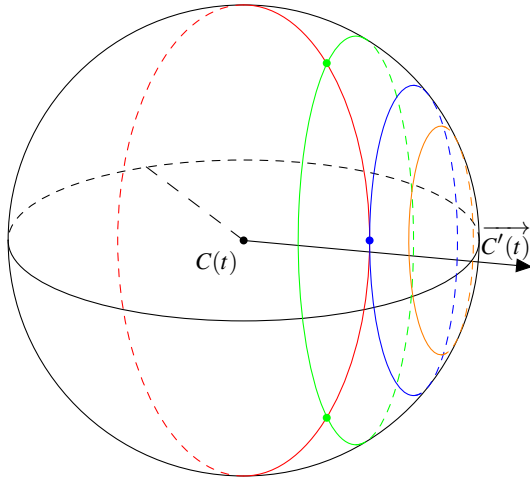


Figure 4: Trois configurations possibles pour le cercle de projection (en rouge) et les cercles caractéristiques. Le cercle caractéristique vert correspond au cas présenté sur la figure 3, où deux points de sa projection de la sphère sont sur le bord de la projection. Le cercle caractéristique bleu correspond à un cas limite : son intersection avec le cercle de projection est réduite à un seul point. Seulement un point de la sphère sera présent sur le bord de la projection. Enfin, le cas du cercle caractéristique orange est le plus défavorable, car l'intersection entre celui-ci et le cercle de projection est vide : la sphère ne sera pas du tout représentée sur le bord de la projection.

de la projection. Il nous sera donc possible d'estimer la projection du squelette d'une surface canal à partir d'un algorithme classique de squelettisation 2D. Nous utiliserons ici un algorithme de squelettisation de Voronoï, ce qui va nous permettre d'obtenir également la topologie du squelette.

Cette section ayant permis d'énoncer les principes de la projection orthographique d'un squelette, nous allons à présent étudier le cas de la projection perspective.

3.2. Projection perspective

Nous avons vu dans le cas de la projection orthographique que l'ensemble des points au bord de la projection de la surface canal est compris dans l'intersection entre le cercle caractéristique et les points de la sphère correspondant au cercle de projection. Dans le cas de la projection perspective, le raisonnement est le même, la seule différence étant l'emplacement des points correspondant au contour de la projection.

En effet, la projection perspective d'une sphère donne non plus un cercle, mais un type particulier d'ellipse. Nous allons voir que les points de la sphère dont la projection est sur le

contour de cette ellipse forment un cercle. Les points projetés sur le contour de la projection de la forme seront donc inclus dans l'intersection entre le cercle caractéristique et le cercle de projection perspective.

Soit une sphère de la surface canal \mathcal{S} , de centre $C(t)$ et de rayon $r(t)$. Nous allons étudier la projection centrale de celle-ci sur le plan $z = 1$, avec pour centre l'origine O_3 du repère (cf. fig. 5). Il s'agit d'un type particulier d'ellipse.

En effet, il est possible de construire un cône tangent à la sphère, d'origine O_3 . Ce cône aura pour axe $\overrightarrow{O_3C(t)}$ et un angle d'ouverture correspondant à l'angle entre $\overrightarrow{O_3C(t)}$ et $\overrightarrow{O_3P}$, avec P un point de la sphère, tel que la projection de P soit au bord de la projection de la sphère (cf. fig. 5). En utilisant le fait que $\|C(t)P\| = r(t)$, on en déduit qu'un point A appartient au cône s'il vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{O_3A}, \overrightarrow{O_3C(t)}) &= \cos(\overrightarrow{O_3P}, \overrightarrow{O_3C(t)}) \\ \cos(\overrightarrow{O_3A}, \overrightarrow{O_3C(t)}) &= \frac{\|\overrightarrow{O_3P}\|}{\|\overrightarrow{O_3C(t)}\|} \\ \cos(\overrightarrow{O_3A}, \overrightarrow{O_3C(t)}) &= \frac{\sqrt{\|\overrightarrow{O_3C(t)}\|^2 - r(t)^2}}{\|\overrightarrow{O_3C(t)}\|} \\ \frac{\overrightarrow{O_3A} \cdot \overrightarrow{O_3C(t)}}{\|\overrightarrow{O_3A}\| \|\overrightarrow{O_3C(t)}\|} &= \frac{\sqrt{\|\overrightarrow{O_3C(t)}\|^2 - r(t)^2}}{\|\overrightarrow{O_3C(t)}\|} \\ \overrightarrow{O_3A} \cdot \frac{\overrightarrow{O_3C(t)}}{\sqrt{\|\overrightarrow{O_3C(t)}\|^2 - r(t)^2}} &= \|\overrightarrow{O_3A}\| \end{aligned}$$

En posant $\overrightarrow{O_3C_c(t)} = \frac{\overrightarrow{O_3C(t)}}{\sqrt{\|\overrightarrow{O_3C(t)}\|^2 - r(t)^2}}$, on en déduit que A appartient au cône si et seulement si :

$$\overrightarrow{O_3A} \cdot \overrightarrow{O_3C_c(t)} = \|\overrightarrow{O_3A}\| \quad (3)$$

Soit Q un point d'intersection entre le cône et le plan d'équation $z = 1$. L'intersection du cône avec ce plan définit l'ellipse d'équation :

$$\begin{aligned} (c_x^2 - 1)x^2 + (c_y^2 - 1)y^2 + (c_z^2 - 1) \\ + 2c_x c_y xy + 2c_x c_z x + 2c_y c_z y = 0 \end{aligned}$$

Avec $C_c(t) = (c_x \ c_y \ c_z)^t$, $Q = (x \ y \ 1)^t$ et $O_3 = (0 \ 0 \ 0)^t$, en mettant l'équation (3) au carré (dans la mesure où la sphère n'intersecte pas le plan image, l'intersection entre le cône de projection et le plan image forme bien une unique ellipse).

En ayant la connaissance du rayon $r(t)$, il est possible de

retrouver l'emplacement du centre de la sphère en fonction du point $C_c(t)$. D'après le théorème de Thalès (cf. fig. 5) :

$$\frac{\|\overrightarrow{O_3 C(t)}\|}{\|\overrightarrow{O_3 C_c(t)}\|} = \frac{r(t)}{\|\overrightarrow{R C_c(t)}\|}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{R C_c(t)}\| &= \sqrt{\|\overrightarrow{O_3 C_c(t)}\|^2 - \|\overrightarrow{O_3 R}\|^2} \\ &= \sqrt{\|\overrightarrow{O_3 C_c(t)}\|^2 - 1} \end{aligned}$$

D'où :

$$\overrightarrow{O_3 C(t)} = r(t) \frac{\overrightarrow{O_3 C_c(t)}}{\sqrt{\|\overrightarrow{O_3 C_c(t)}\|^2 - 1}} \quad (4)$$

En ayant la connaissance de l'ellipse correspondant à la frontière de la projection perspective d'une sphère, il est possible de trouver le centre $C(t)$ et le rayon $r(t)$ de la sphère à un facteur d'échelle près. Nous pouvons en déduire que l'estimation de la projection perspective d'un squelette revient à estimer des ellipses maximales dans une forme 2D. Tout le problème à présent sera d'élaborer un algorithme permettant d'estimer ces ellipses maximales.

3.3. Estimation d'un squelette perspectif

La projection perspective d'une sphère n'étant pas un cercle, la projection perspective du squelette n'est pas le squelette de la projection perspective. Nous devons en réalité non plus trouver des cercles maximaux inclus dans la forme, mais des ellipses telles que nous les avons définies maximales. Cet ensemble d'ellipses nous permettra de définir un « squelette perspectif » associé à la projection perspective. Ce dernier nous donnera des informations sur le squelette 3D que nous cherchons, au même titre que le squelette (orthographique) dans le cas d'une projection orthographique.

Il nous reste cependant un point à résoudre : comment trouver ce squelette perspectif ? Appliquer le même algorithme que pour le calcul du squelette orthographique n'est pas possible, puisque nous ne cherchons pas des cercles maximaux. Il nous est aussi possible d'adapter l'algorithme de Ma *et al.* [MBC12], cependant celui-ci ne donne aucune information de topologie. Nous devons donc ici concevoir un nouvel algorithme, en transformant notre problème de recherche d'ellipses maximales en un problème que nous pourrions résoudre. Nous allons montrer que notre problématique peut se résoudre par l'algorithme suivant :

Nous allons en effet montrer que pour chaque tétraèdre construit selon cet algorithme :

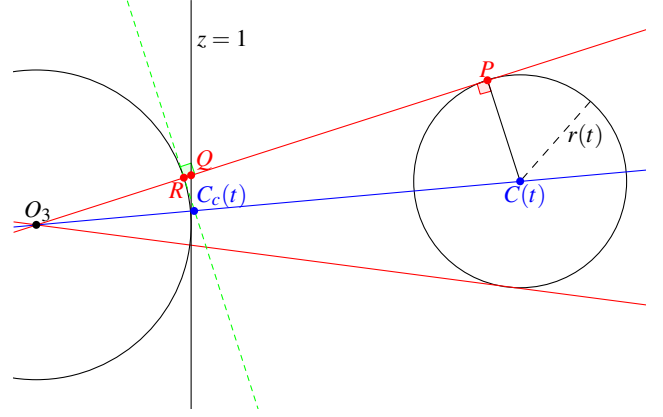


Figure 5: Représentation de la projection d'une sphère sur le plan $z = 1$ (il s'agit d'une vue selon le plan (yO_3z)). La trace de projection centrale de la sphère de centre $C(t)$ et de rayon $r(t)$ sur le plan $z = 1$ est une ellipse, correspondant à l'intersection d'un cône tangent à la sphère avec le plan de projection $z = 1$. Ce cône est défini par le vecteur $\overrightarrow{O_3 C_c(t)}$ et peut se calculer à partir de trois points appartenant à la trace de la projection. En effet, si un point Q appartient à la trace de la projection, on construit un point R , projection de Q sur la boule unité. Le point $C_c(t)$ a pour propriété d'appartenir au plan tangent à la boule unité au point R : trois points permettent de construire trois plans, ce qui suffit dans ce cas pour estimer le point $C_c(t)$.

Algorithme 1 : Estimation d'un squelette perspectif

Données : $\mathcal{Q} = \{Q_i \in \mathbb{R}^3, z_{Q_i} = 1\}_{i=1, \dots, n}$:
discrétisation des points du contour de la
forme 2D

Résultat : \mathcal{S}_p : ensemble discret de cônes

- 1 Construction de $\mathcal{R} = \left\{ R_i, \overrightarrow{O_3 R_i} = \frac{\overrightarrow{O_3 Q_i}}{\|\overrightarrow{O_3 Q_i}\|} \forall Q_i \in \mathcal{Q} \right\}$:
projection des points de \mathcal{Q} sur la sphère unité
- 2 Tétraédrisation de Delaunay sur $\mathcal{R} \cup \{O_3\}$
- 3 Calcul d'un cône pour chaque tétraèdre

- O_3 est un sommet du tétraèdre.
- On peut construire un cône passant par les 4 sommets du tétraèdre, d'origine O_3 et représenté par le vecteur $\overrightarrow{O_3 C_c} = 2\overrightarrow{O_3 D}$, avec D le centre de la sphère.
- Le cône construit correspond à une ellipse maximale sur le plan $z = 1$.

L'utilisation d'une tétraédrisation de Delaunay nous permet de trouver les cônes maximaux, donc les ellipses maximales, de la projection de la forme dont nous cherchons le squelette perspectif. De plus, cet algorithme a pour avantage de donner une topologie au squelette perspectif construit,

c'est-à-dire que nous connaissons les liens entre les différentes sphères composant le squelette.

Supposons que nous avons appliqué l'algorithme 1 à un ensemble de points $\mathcal{Q} = \left\{ Q_i \in \mathbb{R}^3, z_{Q_i} = 1 \right\}_{i=1, \dots, n}$ du plan image $z = 1$, correspondant à une discrétisation de la forme 2D dont nous cherchons le squelette. Nous calculons donc dans un premier temps un ensemble $\mathcal{R} = \left\{ R_i, \overrightarrow{O_3 R_i} = \frac{\overrightarrow{O_3 Q_i}}{\|\overrightarrow{O_3 Q_i}\|} \forall Q_i \in \mathcal{Q} \right\}$, correspondant à la projection des points de \mathcal{Q} sur la sphère unité. L'étape suivante de l'algorithme est la tétraédration de Delaunay de l'ensemble $\mathcal{R} \cup \{O_3\}$.

Montrons d'abord par l'absurde que chaque tétraèdre comprend O_3 parmi ses sommets. Soit un tétraèdre \mathcal{T} , résultant de la tétraédration. Supposons que O_3 ne soit pas un sommet de \mathcal{T} . La tétraédration est telle qu'il existe une unique sphère Σ passant par les quatre sommets de \mathcal{T} et que cette sphère ne contienne aucun autre point que les quatre sommets du tétraèdre. Par construction, tous les points autres que O_3 sont sur la sphère unité. Or la sphère unité n'est pas une sphère maximale de l'ensemble $\mathcal{R} \cup \{O_3\}$, car la boule associée contient O_3 . Les quatre sommets appartiennent donc à l'intersection entre la sphère unité et la sphère Σ , qui est un cercle. Or il n'est pas possible de construire une sphère de façon unique à partir d'un cercle : nous aboutissons à une contradiction, donc O_3 est nécessairement un des sommets du tétraèdre \mathcal{T} .

Montrons à présent que la sphère associée à chaque tétraèdre permet de construire un unique cône d'origine O_3 , défini par le point C_c tel que $\overrightarrow{O_3 C_c} = 2\overrightarrow{O_3 D}$, avec D le centre de la sphère, tel que ce cône contient tous les sommets du tétraèdre. Par construction, C_c appartient à la sphère Σ de centre D et de rayon $\|\overrightarrow{O_3 D}\|$:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{DC_c}\| &= \|\overrightarrow{DO_3} + \overrightarrow{O_3 C_c}\| \\ &= \|\overrightarrow{DO_3} + 2\overrightarrow{O_3 D}\| \\ &= \|\overrightarrow{O_3 D}\| \end{aligned}$$

En posant R_1, R_2 et R_3 les sommets autre que O_3 du tétraèdre (appartenant donc à la sphère unité), les triangles $\{O_3, R_i, C_c\}$ sont rectangles en R_i ($i = 1, 2, 3$). On a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_3 R_i} \cdot \overrightarrow{O_3 C_c} &= \overrightarrow{O_3 R_i} \cdot \overrightarrow{O_3 R_i} + \overrightarrow{O_3 R_i} \cdot \overrightarrow{R_i C_c} \\ &= \|\overrightarrow{O_3 R_i}\|^2 = 1 \\ &= \|\overrightarrow{O_3 R_i}\| \end{aligned}$$

De plus, comme la sphère passant par R_1, R_2, R_3 et O_3 est unique, ces quatre points ne sont pas coplanaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{O_3 R_i}$ sont indépendants. Le point C_c est donc

l'unique point qui vérifie $\overrightarrow{O_3 R_i} \cdot \overrightarrow{O_3 C_c} = \|\overrightarrow{O_3 R_i}\|$. Le cône que nous avons construit est donc l'unique cône passant par les quatre sommets du tétraèdre et ayant pour origine O_3 .

Il nous reste donc à montrer que l'ellipse, intersection du cône défini par le vecteur $\overrightarrow{O_3 C_c}$ avec le plan image, est maximale dans l'ensemble \mathcal{Q} . Dans un premier temps, on sait qu'il existe trois points Q_1, Q_2 et Q_3 de \mathcal{Q} , correspondant respectivement à R_1, R_2 et R_3 , appartenant au cône, donc à l'ellipse (cf. eq. (3)) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_3 Q_i} \cdot \overrightarrow{O_3 C_c} &= (\|\overrightarrow{O_3 Q_i}\| \|\overrightarrow{O_3 R_i}\|) \cdot \overrightarrow{O_3 C_c} \\ &= \|\overrightarrow{O_3 Q_i}\| \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe un point Q_4 de \mathcal{Q} appartenant à l'intérieur du cône, dont la projection sur la sphère unité est R_4 . On a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_3 Q_4} \cdot \overrightarrow{O_3 C_c} &\geq \|\overrightarrow{O_3 Q_4}\| \\ \overrightarrow{O_3 R_4} \cdot \overrightarrow{O_3 C_c} &\geq 1 \\ \overrightarrow{O_3 R_4} \cdot \overrightarrow{O_3 D} &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ce point est inclus dans l'intérieur de la sphère Σ :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{R_4 D}\|^2 &= \|\overrightarrow{R_4 O_3}\|^2 + \|\overrightarrow{O_3 D}\|^2 - 2\overrightarrow{O_3 R_4} \cdot \overrightarrow{O_3 D} \\ &< 1 + \|\overrightarrow{O_3 D}\|^2 - 2\frac{1}{2} \\ &< \|\overrightarrow{O_3 D}\|^2 \\ \|\overrightarrow{R_4 D}\| &< \|\overrightarrow{O_3 D}\| \end{aligned}$$

Ce qui nous amène à une contradiction, car la sphère Σ est construite de telle sorte que son intérieur ne contienne aucun point R_i . Nous sommes ainsi assurés que notre algorithme nous donne un ensemble d'ellipses maximales. Par un raisonnement similaire, toute ellipse maximale sera représentée par un tétraèdre. L'algorithme que nous proposons donne donc l'ensemble des ellipses maximales associées à la discrétisation d'une frontière. Cet ensemble d'ellipses maximales représente ici le squelette perspectif que nous recherchons. De plus, le fait d'avoir utilisé une tétraédration de Delaunay nous donne les liens entre les différents cônes composant le squelette, en garantissant que la topologie du squelette soit conforme à celle de la forme [OI92].

4. Estimation d'une surface canal 3D à partir de deux projections

Nous venons de montrer comment extraire le squelette projectif (orthographique ou perspectif) d'une surface canal.

Nous allons voir à présent comment estimer la rétroprojection des squelettes obtenus sur les deux images. Dans un premier temps, nous montrerons que le squelette projectif (orthographique ou perspectif) associé à chaque image correspond à un espace de dimension deux, dans \mathbb{R}^4 . Nous verrons ensuite comment estimer l'intersection de ces deux espaces de \mathbb{R}^4 et ainsi définir le squelette curviligne 3D que nous cherchons.

4.1. Représentation d'un squelette projectif dans \mathbb{R}^4

En ayant respecté les conditions d'acquisition énoncées dans la section 3.1 (pas d'auto-occlusion du point de vue considéré, notamment), nous avons obtenu un squelette discret de la projection de la forme. Après une étape d'élagage, nous pouvons supposer que ce squelette correspond à une unique branche. Nous pouvons donc le modéliser par une fonction à une variable t , qui associe à chaque valeur du paramètre un cercle (dans le cas orthographique) ou une ellipse (dans le cas perspectif).

Chaque cercle (ou chaque ellipse) d'un squelette projectif orthographique (ou perspectif) est l'image d'un ensemble de sphères. Cet ensemble de sphères peut s'exprimer par une droite de \mathbb{R}^4 , où chaque sphère de centre (x, y, z) et de rayon r sera modélisée par un point (x, y, z, r) . Comme le squelette projectif (orthographique ou perspectif) est une courbe à une variable t , l'ensemble des sphères, dont la projection est un point du squelette, est le suivant :

$$\{S \in \mathbb{R}^4, \exists(t, \lambda), \overrightarrow{O_3 S} = \overrightarrow{O_3 S_o(t)} + \lambda \overrightarrow{D_S(t)}\}$$

Nous modéliserons ici le repère caméra par une matrice de rotation vectorielle \mathcal{R} et une translation $\vec{T} = \overrightarrow{O_3 \Omega}$ (avec Ω l'origine du repère caméra), que la caméra soit orthographique ou perspective.

Cas orthographique

Dans le cas de la projection orthographique, le squelette à une branche est modélisé par une fonction de $t : (x(t), y(t), r(t))$. Ici, après quelques calculs, l'ensemble des sphères dont la projection est un point du squelette s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \{S \in \mathbb{R}^4, \exists(t, \lambda), \overrightarrow{O_3 S} &= \overrightarrow{O_3 S_o(t)} + \lambda \overrightarrow{D_S(t)}, \\ \text{où } \overrightarrow{O_3 S_o(t)} &= \begin{pmatrix} {}^t \mathcal{R} (\overrightarrow{m(t)} - \vec{T}) \\ r(t) \end{pmatrix}, \\ \text{et } \overrightarrow{D_S(t)} &= \begin{pmatrix} {}^t \mathcal{R} \vec{D} \\ 0 \end{pmatrix} \} \end{aligned} \quad (5)$$

avec $\overrightarrow{m(t)}$ le vecteur de coordonnées ${}^t(x(t) \ y(t) \ 0)$ dans le

repère caméra, et \vec{D} la direction de la vue dans le repère caméra : ${}^t(0 \ 0 \ 1)$.

Cas perspectif

Dans le cas de la projection perspective, le squelette à une branche est modélisé par une fonction de $t : \overrightarrow{c_c(t)}$, fonction représentant l'axe d'un cône de projection dans le repère caméra, en chaque valeur du paramètre t . L'ensemble des sphères dont la projection est un point du squelette va s'exprimer ici de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \{S \in \mathbb{R}^4, \exists(t, \lambda), \overrightarrow{O_3 S} &= \overrightarrow{O_3 S_o(t)} + \lambda \overrightarrow{D_S(t)}, \\ \text{où } \overrightarrow{O_3 S_o(t)} &= \begin{pmatrix} -{}^t \mathcal{R} \vec{T} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \text{et } \overrightarrow{D_S(t)} &= \begin{pmatrix} \overrightarrow{{}^t \mathcal{R} c_c(t)} \\ \sqrt{\|\overrightarrow{{}^t \mathcal{R} c_c(t)}\|^2 - 1} \\ 1 \end{pmatrix} \} \end{aligned} \quad (6)$$

Notons qu'en exprimant les squelettes projectifs de cette façon dans \mathbb{R}^4 , il nous est possible de retroprojeter par le même algorithme les squelettes de type orthographique et perspectif.

4.2. Rétroprojection des squelettes projectifs

Que la caméra soit orthographique ou perspective, nous avons modélisé le squelette projectif par une surface de \mathbb{R}^4 . Avec deux images, nous obtenons deux squelettes projectifs, donc deux surfaces de \mathbb{R}^4 , associés aux fonctions vectorielles $\overrightarrow{O_3 S_1(t, \lambda)} = \overrightarrow{O_3 S_{o1}(t)} + \lambda \overrightarrow{D_{S1}(t)}$ et $\overrightarrow{O_3 S_2(t, \lambda)} = \overrightarrow{O_3 S_{o2}(t)} + \lambda \overrightarrow{D_{S2}(t)}$. Le squelette 3D que nous cherchons est en général l'intersection de ces surfaces.

Le squelette 3D, modélisé par une fonction $\Sigma(t)$ qui associe une sphère à chaque valeur du paramètre t , est tel qu'il existe deux fonctions t_1 et t_2 monotones, avec :

$$\forall t, \exists(\lambda_1, \lambda_2), \overrightarrow{O_3 \Sigma(t)} = \overrightarrow{O_3 S_1}(t_1(t), \lambda_1) = \overrightarrow{O_3 S_2}(t_2(t), \lambda_2)$$

Autrement dit, chaque sphère du squelette est sur l'intersection de deux droites, passant respectivement par $S_{o1}(t)$ et $S_{o2}(t)$ et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{D_{S1}(t)}$ et $\overrightarrow{D_{S2}(t)}$. Ces deux vecteurs correspondant à deux vues différentes de la même sphère, il est raisonnable de supposer qu'il ne sont pas colinéaires. Nous cherchons donc ici deux fonctions t_1 et t_2 , telles que les droites $\mathcal{D}(S_{o1}(t_1(t)), \overrightarrow{D_{S1}(t)})$ et $\mathcal{D}(S_{o2}(t_2(t)), \overrightarrow{D_{S2}(t)})$ s'intersectent pour toute valeur de t . Cela signifie que la distance entre les deux droites est nulle,

pour tout t . Cette distance est $d_{12}(t) = \|\overrightarrow{H_1(t_1(t))H_2(t_2(t))}\|$, avec $\overrightarrow{O_3H_i(t_i(t))} = \overrightarrow{O_3S_{oi}(t_i(t))} + \lambda_i \overrightarrow{D_{Si}(t_i(t))}$ et :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1}b$$

avec :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{D_{S1}(t_1(t))}\|^2 & -\overrightarrow{D_{S1}(t_1(t))} \cdot \overrightarrow{D_{S2}(t_2(t))} \\ -\overrightarrow{D_{S1}(t_1(t))} \cdot \overrightarrow{D_{S2}(t_2(t))} & \|\overrightarrow{D_{S2}(t_2(t))}\|^2 \end{pmatrix}$$

et :

$$b = \begin{pmatrix} \overrightarrow{S_{o1}(t_1(t))S_{o2}(t_2(t))} \cdot \overrightarrow{D_{S1}(t_1(t))} \\ \overrightarrow{S_{o2}(t_2(t))S_{o1}(t_1(t))} \cdot \overrightarrow{D_{S2}(t_2(t))} \end{pmatrix}$$

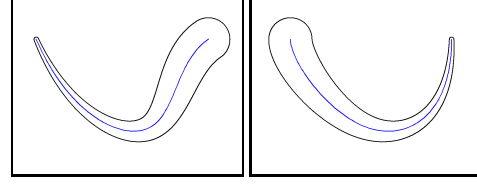
Pour minimiser $d_{12}(t)$ (pas toujours nulle en pratique), nous estimons les fonctions t_1 et t_2 , et nous calculons ensuite $\Sigma(t)$ comme le milieu du couple $(H_1(t_1(t)), H_2(t_2(t)))$, pour tout t . Cette étape effectuée, nous avons finalement notre surface canal que nous pourrions habiller selon les techniques exposées dans l'état de l'art.

5. Résultats

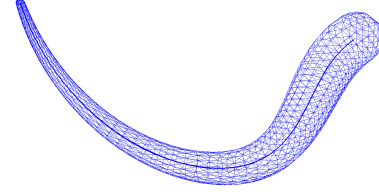
Données de synthèse

Nous appliquons notre algorithme sur des données de synthèse, pour en évaluer la précision. Pour ce faire, nous modélisons une surface canal 3D par une B-Spline, puis nous projetons cette surface sur des plans, pour en avoir une trace binaire, en vérifiant les conditions du paragraphe 3.1. À partir de cette trace, nous appliquons un algorithme de *marching squares* (adaptation du *marching cubes* en 2D [LC87]) pour en extraire les contours, puis nous en estimons le squelette orthographique ou perspectif selon les méthodes expliquées dans la section 3. Après élagage des squelettes selon la méthode du *Scale Axis Transform* [GMPW09], nous les approximations par des B-Splines qui vont servir à estimer un squelette 3D comme expliqué dans la section 4, également représenté par une B-Spline. Pour évaluer la différence entre la B-Spline originale et la B-Spline fournie par notre algorithme, nous calculons dans un premier temps la distance de Hausdorff entre les deux formes 3D. Nous divisons ensuite cette distance par le diamètre local de la surface canal au point où l'erreur est la plus importante, pour obtenir l'erreur relative au rayon.

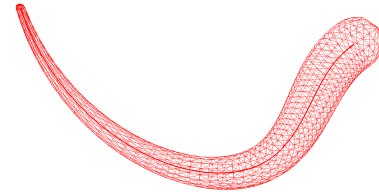
Dans le cas général, c'est-à-dire si la forme ne comporte pas d'auto-occultations des points de vues considérés, nous obtenons une erreur relative entre les deux courbes inférieure à 10% (cf. fig. 6 et 7). Cette erreur relative augmente lorsque



(a) Projection de la forme de référence selon deux points de vue différents et squelette estimé.



(b) Forme 3D reconstruite.



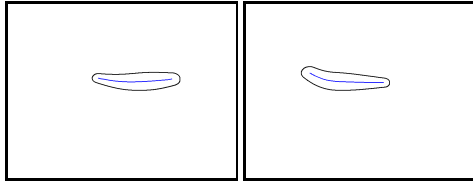
(c) Forme 3D de référence.

Figure 6: Illustration des différentes étapes du protocole de test de l'algorithme. Dans un premier temps, la forme 3D de référence est projetée orthogonalement selon deux points de vue différents. Nous extrayons le squelette correspondant à ces deux formes 2D, que nous approximations par une B-Spline (6a). Ensuite, nous appariions les points des B-Splines entre eux, pour obtenir une estimation du squelette 3D (6b). Nous comparons ensuite les résultats de notre reconstruction à la forme de référence (6c), en utilisant la distance de Hausdorff. Dans ce cas, l'erreur relative entre les deux formes 3D est de 7,6%.

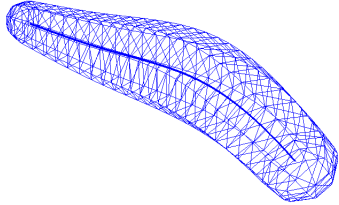
nous enfreignons les conditions de reconstruction énoncées dans la section 3 (par exemple en cas d'auto-occultation). Un autre cas dégénéré est présenté sur la figure 8, où il existe plusieurs appariements possibles pour les points des B-Splines. Ainsi, dans ce cas, le problème est mal posé, car ces deux seules projections ne fournissent pas assez d'informations pour reconstruire la totalité du squelette.

Données réelles

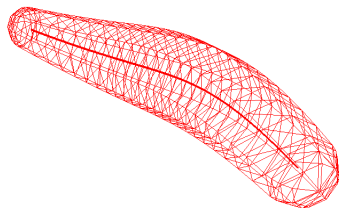
Les acquisitions réelles sont faites à partir de caméras calibrées intrinsèquement et extrinsèquement. L'objet est placé sur un fond vert pour faciliter l'opération de segmentation. Ensuite, l'objet est découpé en différentes régions, chacune correspondant à une surface canal. Chaque surface canal est ensuite reconstruite indépendamment, puis l'ensemble est



(a) Projection perspective de la forme 3D selon deux points de vue différents.



(b) Forme 3D reconstruite.



(c) Forme 3D de référence.

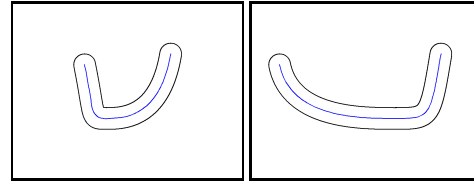
Figure 7: Reconstruction d'une surface canal à partir de projections perspectives de celle-ci. L'erreur relative entre les deux formes 3D est de 2,5%.

réassemblé. Nous obtenons ainsi une forme 3D composée de plusieurs morceaux (cf. fig. 9). On note ici que les parties correspondant à un squelette curviligne sont bien reconstruites, tandis que les parties correspondant à un squelette surfacique sont moins bien reconstruites.

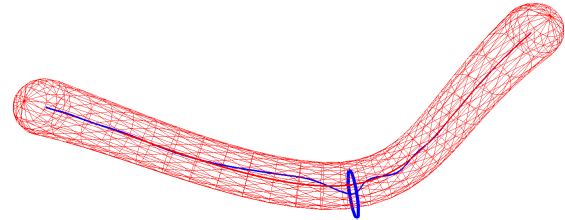
6. Conclusion et perspectives

Nous venons d'exposer une nouvelle méthode de reconstruction 3D, basée sur la recherche du squelette de l'objet à reconstruire. Pour ce faire, nous estimons le squelette 3D de l'objet, à partir de deux de ses projections. Celles-ci nous permettent de retrouver un squelette perspectif, correspondant à la projection du squelette 3D, sous certaines conditions. À partir des projections du squelette, nous effectuons une triangulation, nous permettant de retrouver le squelette 3D de l'objet.

Cette méthode permet de reconstruire un objet à partir de deux prises de vue calibrées. Nous pouvons cependant noter un certain nombre de contraintes à respecter concernant la forme de l'objet et ses prises de vue associées. Tout d'abord, les prises de vue doivent être telles que la forme ne s'auto-occulte pas. Ensuite, l'objet doit être une surface



(a) Projection orthographique de la forme 3D selon deux points de vue différents.



(b) Forme et squelette 3D de référence (en rouge) et squelette estimé (en bleu). La distance la plus importante entre la forme de référence et la forme estimée se situe au niveau du cercle caractéristique bleu.

Figure 8: Illustration d'une ambiguïté qui peut apparaître lors de la reconstruction du squelette 3D. Sur les images (8a), une partie du squelette est contenue dans un plan formé par les deux directions de projection. Le problème est alors mal posé (en effet, il existe plusieurs squelettes pouvant donner ces projections) et le squelette 3D (8b) n'est pas reconstruit de façon exacte. Ici, l'erreur relative entre les deux formes 3D monte à 20%.

canal. De plus, la reconstruction en elle-même comporte des incohérences : la surface canal associée au squelette n'est par exemple pas exempte d'auto-intersections. L'objet de nos futurs travaux sera de réduire les contraintes sur l'objet et de réduire les incohérences de la reconstruction.

Une piste pour s'affranchir de la contrainte de non auto-occultation de l'objet consiste à utiliser plus de deux acquisitions de l'objet, afin de déduire la forme réelle de l'objet. Ensuite, pour reconstruire un objet dont le squelette est constitué de différentes branches, un appariement devra être effectué.

La vocation de cette méthode étant de reconstruire une version simplifiée d'un objet, il est tout à fait envisageable de la combiner à une méthode de reconstruction multi-vues pour retrouver un maillage plus précis de la forme à reconstruire. L'idée serait ici d'appliquer notre méthode pour obtenir une reconstruction grossière de l'objet, puis de l'affiner en utilisant le nuage de points reconstruit par une méthode multi-vues.

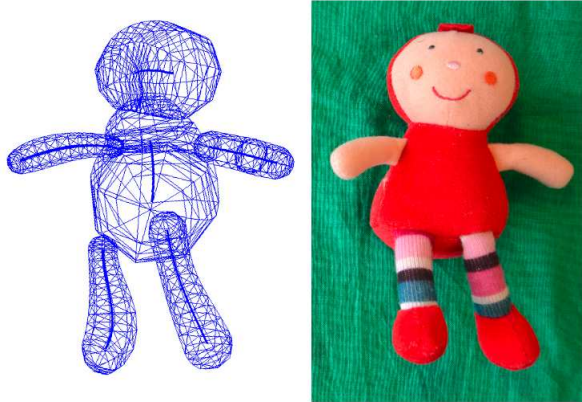


Figure 9: Reconstruction 3D d'une poupée, par assemblage de plusieurs surfaces canal. Les parties dont le squelette peut être assimilé à un squelette curviligne (bras et jambes) sont bien reconstruites, les autres parties (torse, tête) ont des défauts volumiques.

Références

- [ACK01a] AMENTA N., CHOI S., KOLLURI R. K. : The power crust. In *ACM Symposium on Solid Modeling and Applications* (2001).
- [ACK01b] AMENTA N., CHOI S., KOLLURI R. K. : The power crust, unions of balls, and the medial axis transform. *Computational Geometry* (2001).
- [AM97] ATTALI D., MONTANVERT A. : Computing and simplifying 2D and 3D continuous skeletons. *Computer Vision and Image Understanding* (1997).
- [Blu67] BLUM H. : A transformation for extracting new descriptors of shape. *Models for the Perception of Speech and Visual Form* (1967).
- [CBK03] CHEUNG K., BAKER S., KANADE T. : Shape-from-silhouette of articulated objects and its use for human body kinematics estimation and motion capture. In *IEEE conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (2003).
- [CG06] CAGLIOTI V., GIUSTI A. : Reconstruction of canal surfaces from single images under exact perspective. In *European Conference on Computer Vision*. 2006.
- [CG09] CAGLIOTI V., GIUSTI A. : Recovering ball motion from a single motion-blurred image. *Computer Vision and Image Understanding* (2009).
- [DRF12] DELAMÉ T., ROUDET C., FAUDOT D. : From a medial surface to a mesh. In *Symposium on Geometry Processing* (2012).
- [Ede95] EDELSBRUNNER H. : The union of balls and its dual shape. *Discrete & Computational Geometry* (1995).
- [Ede99] EDELSBRUNNER H. : Deformable smooth surface design. *Discrete & Computational Geometry* (1999).
- [GMPW09] GIESEN J., MIKLOS B., PAULY M., WORMSER C. : The scale axis transform. In *ACM Symposium on Computational Geometry* (2009).
- [KV05] KRUIHOF N., VEGTER G. : Meshing skin surfaces with certified topology. In *International Conference on Computer Aided Design and Computer Graphics* (2005).
- [Lau94] LAURENTINI A. : The visual hull concept for silhouette-based image understanding. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* (1994).
- [LC87] LORENSEN W. E., CLINE H. E. : Marching cubes : A high resolution 3d surface construction algorithm. *SIGGRAPH Computer Graphics* (1987).
- [LLS92] LAM L., LEE S.-W., SUEN C. : Thinning methodologies - a comprehensive survey. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* (1992).
- [MBC12] MA J., BAE S., CHOI S. : 3d medial axis point approximation using nearest neighbors and the normal field. *The Visual Computer* (2012).
- [OI92] OGNIWICZ R., ILG M. : Voronoi skeletons : Theory and applications. In *IEEE conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (1992).
- [PP97] PETERNELL M., POTTMANN H. : Computing rational parametrizations of canal surfaces. *Journal of Symbolic Computation* (1997).
- [RGF00] RIGAUDIÈRE D., GESQUIÈRE G., FAUDOT D. : Shape modelling with skeleton based implicit primitives. In *Graphicon* (2000).
- [Smi87] SMITH R. : Computer processing of line images : A survey. *Pattern Recognition* (1987).
- [XFS06] XU Z., FENG R., SUN J.-G. : Analytic and algebraic properties of canal surfaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics* (2006).
- [YFJ*02] YUSHKEVICH P., FLETCHER P. T., JOSHI S., THALL A., PIZER S. M. : Continuous medial representations for geometric object modeling in 2D and 3D. *Image and Vision Computing* (2002).
- [ZHC11] ZANNI C., HUBERT E., CANI M.-P. : Warp-based helical implicit primitives. *Computers & Graphics* (2011).