

Proposition d'un descripteur de formes pour la recherche et la classification des maillages 3D.

Bilal MOKHTARI^{1,2}, Dominique MICHELUCCI¹, Kamal Eddine MELKEMI², et Sebti FOUFOU³

¹LE2I, Université de Bourgogne, 21000 Dijon, France

²Département d'Informatique, Université de Biskra, Algérie

³Département d'Informatique, Université de Doha, Qatar

Résumé

Dans cet article, nous proposons une méthode pour reconnaître et apparier les formes 3D. Les formes sont décrites par des maillages triangulaires. Nous utilisons le caractère localement saillant des sommets du maillage pour définir un premier descripteur S_1 , qui est attaché à chaque sommet. Nous utilisons aussi des propriétés plus globales de la «géométrie de la diffusion» – par exemple la diffusion de la chaleur – pour définir un second descripteur, S_2 , attaché lui aussi à chacun des sommets.

Nous fusionnons ensuite ces deux descripteurs S_1 et S_2 en un seul, S , par la règle dite du produit. C'est théoriquement la fusion la plus simple et la plus efficace dans notre cas ; nous le confirmons expérimentalement en comparant les résultats avec ceux obtenus avec les autres règles classiques de fusion de descripteurs : la somme, le minimum, le maximum, la moyenne.

Nous démontrons la puissance de notre méthode en la comparant avec d'autres déjà proposées dans la littérature. Nous montrons que le descripteur S est invariant par transformation rigide, par changement de posture (assis, debout, couché, accroupi, avec ou sans les mains sur les hanches), et même par changement de topologie, etc. Par exemple, le descripteur S distingue les femmes (Victoria) des hommes (David).

Mots-clés : appariement de formes, recherche de formes, sommet saillant, chaînes de Markov, schéma de combinaison.

1. Introduction

L'appariement des formes, et la recherche de formes sont des tâches cruciales pour l'informatique graphique, la vision par ordinateur, les dépôts de formes, la robotique, etc [VH01, CCM*13].

Actuellement, avec l'avancement de technologies qui produisent et manipulent des modèles 3D, la classification des modèles 3D est devenu très utile dans différents domaines d'applications, nécessitant d'identifier des modèles dans une large collection de modèles 3D.

Les maillages triangulaires sont les représentations des formes 3D les plus utilisées, car les plus simples et les plus commodes. Cependant, la structure des maillages n'a pas la régularité des images 2D ou 3D, ce qui complique l'analyse

des formes [HH09]. Lors de l'analyse de formes rigides représentées par des maillages triangulaires, il faut considérer des propriétés invariantes par translation, rotation, et changement d'échelle. Pour des objets non rigides, il faut considérer des propriétés invariantes avec le changement de posture, voire avec des changements de topologie : il faut reconnaître une personne qu'elle soit assise, debout, couchée, avec ou sans les mains dans ses poches. Cette contrainte est essentielle pour garantir la robustesse de la reconnaissance automatique de formes.

Plusieurs recherches ont été consacrées aux descripteurs discriminants de formes. Ils sont utilisés pour analyser, reconnaître et distinguer les formes. Ils peuvent être classés en deux catégories. La première considère la géométrie locale [TCDV10, GCO06, TCF09, TDVC11, AMSF11] et la seconde des propriétés structurelles plus globales [FSK11, SSGD03, CLCL11, CK11, CO02, MH12]. Dans la seconde, figurent les méthodes fondées sur des graphes [FSK11], des squelettes [SSGD03, CLCL11, CK11], et des graphes de Reeb [CO02, MH12].

Plusieurs descripteurs associés aux sommets des maillages ont été proposés [FSK11, OFCD01, MS09, RLa05]. Toutes ces méthodes construisent une distribution de probabilité à partir des descripteurs (valeurs) associés aux sommets.

Ces dernières années ont vu l'écllosion de la géométrie de la diffusion [RLa05]. Elle fournit plusieurs descripteurs des propriétés intrinsèques des formes ; ceux-ci ont une interprétation intuitive en termes de fréquences spatiales. Elle permet de réutiliser les concepts et les outils de l'analyse harmonique. Ainsi, Mona et al. [MS09] présentent une combinaison de plusieurs de ces descripteurs afin de représenter et appairer des nuages de points 3D. L'inconvénient de ces descripteurs est la complexité en temps.

Fang et al [FSK11] définissent un descripteur de température. Ils étudient comment une calorie virtuelle émise par chacun des sommets du maillage se diffuse vers les autres sommets au cours du temps. L'inconvénient de cette méthode est sa dépendance à l'échelle. L'échelle des différents objets est généralement inconnue, et appropriée pour différentes parties de l'objet.

Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode. Tout d'abord, nous définissons deux descripteurs associés aux sommets du maillage ; le premier, S_1 , décrit le caractère saillant du sommet dans son voisinage ; le second, S_2 , est un descripteur de diffusion : les sommets du maillage sont les états d'une chaîne de Markov, et la valeur du descripteur S_2 de chaque sommet est la probabilité stationnaire de l'état correspondant dans la chaîne de Markov. S_1 est un descripteur local, et S_2 est un descripteur global.

Ensuite, nous combinons ces deux descripteurs S_1 et S_2 en un seul descripteur, appelé S dans cet article. La fusion des descripteurs est un problème bien étudié. Dans notre situation, S_1 et S_2 sont deux descripteurs presque indépendants et fiables. D'après la théorie de la fusion de descripteurs, la fusion précoce avec la règle du produit : $S(v) = S_1(v) \times S_2(v)$ est la meilleure dans ce cas. La valeur du descripteur S en chaque sommet est le produit des valeurs des descripteurs S_1 et S_2 de ce sommet, d'où le nom de la règle. La comparaison de la fusion par produit avec les autres méthodes classiques de fusion confirme la théorie : la règle du produit donne les meilleurs résultats.

Pour trouver les formes dans un dépôt qui ressemblent le plus à une forme requise : la requête, notre méthode procède classiquement en deux phases. La première phase est un pré-traitement qui calcule les descripteurs S_1 , S_2 , et leur fusion pour toutes les formes 3D considérées, celles du dépôt et celles des requêtes. Le même descripteur, disons S , est bien sûr utilisé pour toutes les formes. Pour chaque forme, le descripteur est converti en histogramme. La deuxième phase calcule la ressemblance entre deux formes, la requête et une forme du dépôt. Cela revient à calculer une distance (ou une pré-distance) entre leurs histogrammes. Nous avons utilisé le χ^2 .

La suite de l'article est structurée comme suit. La Section 2 décrit le cadre de notre méthode. La Section 3 détaille le descripteur de saillance et le descripteur de diffusion. La Section 4 présente le descripteur de fusion et sa conversion en histogramme. Les résultats expérimentaux et une discussion sont donnés en Section 5. La Section 6 tire les conclusions.

2. Le principe

Ce type de méthodes considère les formes comme des dés généralisés. Par exemple, la surface frontière de chaque forme 3D considérée est échantillonnée de façon uniforme par $n = 10^4$ points, et chaque point échantillon est étiqueté avec sa distance au centre de gravité de la forme. Pour chaque forme, ce vecteur de distances $d_i, i = 1, \dots, n$ est converti en un histogramme de $b = \sqrt{n}$ tiroirs. Pour une sphère, l'histogramme est un Dirac, et différent de l'histogramme d'un cube ou d'une autre forme. La distance, au sens de ressemblance, entre deux formes est définie comme la distance entre leurs histogrammes. Ce descripteur D2 [OFCD01] : la distance entre un point aléatoire sur la frontière de l'objet et le centre de gravité de l'objet, est simple et donne de bons résultats pour les objets rigides. Il a une limitation évidente : il ne fonctionne pas pour les objets non rigides, par exemple les êtres vivants qui changent de posture.

Ce type de méthodes est utilisé dans d'autres domaines scientifiques. En fait, il remonte aux travaux de Joseph Fourier, qui créa l'analyse harmonique et la géométrie de diffusion de la chaleur [RLa05] pour poser et résoudre l'équation de la chaleur. Récemment, en mécanique quantique, J. Galvez [Gal12] a associé à chaque particule élémentaire un graphe et a pu trouvé une relation numérique, valable pour toutes les particules élémentaires, qui lie la masse, mesurée empiriquement, de chaque particule avec certains des moments spectraux de la matrice d'incidence du graphe associé à la particule (le n ième moment spectral est la somme des puissances n ièmes des valeurs propres de la matrice, autrement dit la trace de la puissance n ième de la matrice).

Cet article propose trois descripteurs : un local, S_1 ; un global, S_2 ; une fusion des deux, S . Contrairement au descripteur D2, ces trois descripteurs sont invariants par changement de pose, et même par changement de topologie.

3. Les descripteurs de saillance et de diffusion

Cette section décrit les descripteurs S_1 de saillance et S_2 de diffusion. Le maillage triangulaire \mathcal{M} décrit un graphe non orienté $\mathcal{G} = (V, E, w)$, où V est l'ensemble des sommets $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ du maillage, $E \subset V \times V$ est l'ensemble des arêtes de \mathcal{M} , et $w(v_i, v_j)$ est le poids, ou coût, de l'arête $(v_i, v_j) \in E$. Nous notons d_i le degré du sommet v_i , et $N(v_i) = \{v_j | (v_i, v_j) \in E\}$ le voisinage d'un sommet v_i ; un sommet n 'appartient pas à son voisinage.

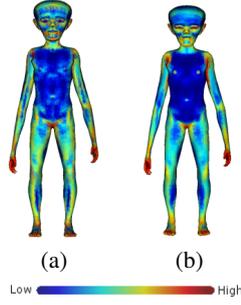


Figure 1: Carte de couleur représente les valeurs de saillance de tous les sommets gradués de plus petite (bleu) au plus grande (rouge). a : les valeurs avant lissage. b : les valeurs après lissage.

Seuls les sommets et les arêtes du maillage \mathcal{M} sont pris en compte pour construire le graphe G . Les faces, triangulaires, de \mathcal{M} sont ignorées. Toute clique de 3 sommets A, B, C dans le graphe G représente implicitement une face triangulaire ABC . Or, même si c'est improbable, un maillage peut contenir une clique de trois sommets (c'est à dire les trois sommets et les trois arêtes AB, BC, CA) sans que la face triangulaire correspondante ABC n'existe, par exemple quand ABC est un trou. En pratique, cela ne pose pas de problème.

3.1. Le descripteur de saillance

Le premier descripteur S_1 est basé sur le caractère saillant du sommet dans la forme. C'est une tentative pour caractériser chaque sommet relativement à ses voisins dans le graphe. Ce descripteur n'est pas modifié par les changements de pose, sauf localement aux articulations (cou, coude, genou) et il permet de résumer et de signer la forme par une information discriminante et visuellement pertinente. Pour chaque sommet v_i , son descripteur de saillance est calculé en fonction des normales des faces incidentes en v_i .

Définition 1 Soit $f = f_1, \dots, f_n$ l'ensemble des faces, toutes triangulaires, du maillage \mathcal{M} . Chaque face f_j est définie par ses trois sommets $A_j B_j C_j$ dans le graphe \mathcal{G} , où elles sont liées par les arêtes $A_j B_j, A_j C_j$, et $B_j C_j$. La normale à la face $A_j B_j C_j$ est le vecteur $\vec{N}_j = (\vec{B}_j - \vec{A}_j) \times (\vec{C}_j - \vec{A}_j)$ où \times désigne le produit vectoriel.

Remarque : l'orientation n'a pas d'importance, mais le lecteur peut supposer que $A_j B_j C_j$ tourne dans le sens horaire, si bien que le vecteur \vec{N}_j pointe vers l'extérieur. Le vecteur normal en v_i , noté $\vec{N}(v_i)$, est défini par l'équation (1).

$$\vec{N}(v_i) = \frac{1}{d} \sum_j \vec{N}_j, \quad j \in N(v_i), d = |N(v_i)| \quad (1)$$

On note $s(v_i) = \|\vec{N}(v_i)\|$ la longueur du vecteur normal $\vec{N}(v_i)$ au point v_i . La Figure 1.(a) montre une carte en couleur des valeurs $s(v_i)$ associées aux sommets d'un modèle. Enfin, le descripteur S_1 en v_i est donné par l'équation (2) (voir Figure 1 (b)).

$$S_1(v_i) = \frac{1}{d} \sum_{v_l \in N(v_i)} s(v_l), d = |N(v_i)| \quad (2)$$

Notez que nous avons fait une normalisation sur tout les objets de telle sorte que $S_1(v_i)$ se trouve dans $[0, 1]$. La figure 2 montre une image de plusieurs modèles, où chaque sommet est colorié avec une couleur dépendant linéairement de sa valeur S_1 : bleu pour 0, rouge pour 1.

3.2. Le descripteur de diffusion

Le second descripteur utilise un processus Markovien et une diffusion géométrique. A chaque arête est associée un coût, positif, $w(v_i, v_j)$. Il est défini en fonction de sa longueur euclidienne normalisée $d(v_i, v_j)$ et de la saillance de ses deux sommets extrémités. Définissons d'abord U en termes de distances Euclidiennes et de différence de saillances entre sommets adjacents, comme ceci :

$$U = 2 \times \sum_{k,l}^n d(v_k, v_l) \times |S_1(v_k) - S_1(v_l)|, \quad l > k, (v_k, v_l) \in E \quad (3)$$

Ensuite nous définissons le coût $w(i, j)$ de l'arête (v_i, v_j) en considérant la distance Euclidienne $d(v_i, v_j)$ entre v_i et v_j , et leur différence de saillance :

$$w(v_i, v_j) = \frac{d(v_i, v_j) \times |S_1(v_i) - S_1(v_j)|}{U} \quad (4)$$

Remarquons que $w(v_i, v_j) = w(v_j, v_i)$ et $\sum_{i,j} w(v_i, v_j) = 1$.

Considérons maintenant $X(t)$ une chaîne de Markov à états finis sur le graphe \mathcal{G} . Les sommets de \mathcal{G} sont les états de la chaîne de Markov. Nous notons $P(v_i, v_j)$ la probabilité de transition entre le sommet, ou état, v_i , et le sommet v_j . Quand une arête lie v_i et v_j , la probabilité de transition est donnée par l'équation (5), sinon elle est nulle.

$$P(X(t+1) = v_j | X(t) = v_i) = \frac{w(v_i, v_j)^{-1}}{\sum_{v_k \in N(v_i)} w(v_i, v_k)^{-1}} \quad (5)$$

Remarquons que $\sum_{v_j \in N(v_i)} P(v_i, v_j) = 1$, donc la matrice P est stochastique.

Dans notre travail, les poids des arêtes issues d'un même sommet v_i sont différents, et les transitions depuis v_i ne sont pas équiprobables. Pour définir le descripteur de diffusion

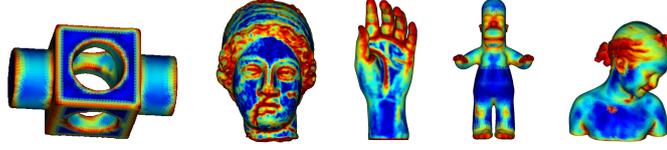


Figure 2: Carte de couleur des valeurs associées à tout les sommets de chaque modèle calculés en utilisant S_1 .

S_2 , nous considérons deux matrices de taille $n \times n$, W et D . Les valeurs dans ces matrices sont définies comme suit :

$$W(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{w(v_i, v_j)} & \text{Si } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{autrement (inutilisé)} \end{cases}$$

$$D(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{v_j \in N(v_i)} w(v_i, v_j)} & \text{Si } i = j \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

W est la matrice pondérée de la matrice d'adjacence du graphe \mathcal{G} , et D est une matrice diagonale $D(i, i) = \sum_j W(i, j)$.

En conséquence, la matrice des probabilités de transition, P , peut être définie par l'équation (6) :

$$P = D^{-1}W \quad (6)$$

où $P(i, j)$ est la probabilité de la transition d'une marche aléatoire du sommet v_i vers le sommet v_j . Il résulte de l'équation (5) que le coût de chaque arête et la probabilité de la traverser varient de façons opposées : plus le coût est grand, et plus la probabilité est faible.

Remarquons qu'en général, la matrice P n'est pas symétrique : $P(v_i, v_j) \neq P(v_j, v_i)$. Nous remplaçons cette matrice P par la matrice P_s définie par :

$$P_s = D^{\frac{1}{2}} P D^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}} W D^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Comme W est symétrique, et que D est diagonale, $P_s = D^{\frac{1}{2}} P D^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}} W D^{-\frac{1}{2}}$ est aussi symétrique ; P_s est une matrice diagonalisable de taille n par n , qui a les mêmes valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ que la matrice P . Les vecteurs propres correspondants $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ forment une base orthogonale de \mathbb{R}^n .

$$P_s \phi_i = \lambda_i \phi_i \quad (8)$$

Comme les ϕ_i sont des vecteurs propres orthogonaux pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R} , la matrice P_s admet deux familles de vecteurs bi-orthogonaux, un vecteur ligne ψ_i , et un vecteur colonne ϕ_i . Ils se définissent en fonction des vecteurs propres ϕ_i de P [NLCK05], par l'équation (9) :

$$\phi_i = \phi_i D^{\frac{1}{2}}, \quad \psi_i = \phi_i D^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Les valeurs propres réelles (car P_s est symétrique réelle) λ_i sont triées en ordre décroissant $\lambda_0 = 1 \geq \lambda_1 \geq \dots \lambda_n$. Le vecteur propre à gauche correspondant à la valeur propre $\lambda_0 = 1$ est (à un scalaire multiplicatif près) la distribution stationnaire de probabilité de la chaîne de Markov. En pratique, ces chaînes de Markov sont toujours irréductibles, et ont donc une seule distribution stationnaire de probabilité.

Ces fonctions propres peuvent être utilisées pour définir la probabilité pour une marche aléatoire, qui commence en un sommet v_i au temps t , pour atteindre un sommet v_j du graphe au temps $t + \Delta t$, donc en Δt étapes :

$$P(X(t_0 + \Delta t) = v_j \mid X(t_0) = v_i) = \phi_0(v_j) + \sum_{k=1}^K \psi_k(v_i) \lambda_k^{\Delta t} \phi_k(v_j) \quad (10)$$

$\psi_k(\phi_k)$ est la valeur du k ième vecteur propre à droite (respectivement à gauche) au point v_i (respectivement v_j). K est le nombre de valeurs propres prises en compte. Nous obtenons de bons résultats en pratique avec $K = 6 \ll n$, et $\Delta t = 40$. Remarquons que nous utilisons le logiciel Scilab [Sci12] pour calculer les valeurs et vecteurs propres. Nous utilisons une représentation creuse pour W : $W_{i,j}$ n'est pas mémorisé quand l'arête (v_i, v_j) n'existe pas dans le graphe. Le nombre d'arêtes du graphe est proportionnel au nombre de sommets. Un vecteur suffit pour stocker la matrice D .

La ressemblance entre deux sommets v_i et v_j peut être calculée en fonction de la distribution de probabilité au temps t aux deux sommets. Cette mesure est appelée distance de diffusion et peut être interprétée comme la probabilité d'une marche aléatoire d'un sommet à l'autre. La distance de diffusion est donnée par la formule :

$$D_{\Delta t}(v_i, v_j)^2 = \sum_{k=1}^K \lambda_k^{2\Delta t} (\psi_k(v_i) - \psi_k(v_j))^2 \quad (11)$$

En s'appuyant sur cette mesure de distance, nous pouvons définir les Ψ -coordonnées, ou coordonnées intrinsèques, d'un sommet v_i en utilisant les vecteurs propres ; cette transformation est appelée une carte de diffusion :

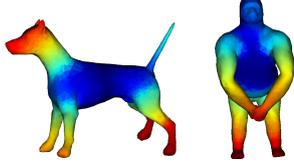


Figure 3: Carte de couleurs de valeurs associée aux sommets calculés en utilisant le descripteur S_2

$$\Psi_{\Delta_r}(v_i) = (\lambda_1^{\Delta_r} \psi_1(v_i), \lambda_2^{\Delta_r} \psi_2(v_i), \dots, \lambda_k^{\Delta_r} \psi_k(v_i)) \quad (12)$$

Ces coordonnées sont intrinsèques, contrairement aux coordonnées cartésiennes qui dépendent du repère cartésien utilisé. Le descripteur de diffusion, S_2 , est la norme Euclidienne des coordonnées intrinsèques. S_2 est donc donné par :

$$S_2(v_i) = \|\Psi_{\Delta_r}(v_i)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^K (\lambda_k^{\Delta_r} (\psi_k(v_i)))^2} \quad (13)$$

$S_2(v_i)$ est dans l'intervalle $[0, 1]$, parce que tous les vecteurs propres sont normalisés, de sorte que leur norme soit égale à 1, et tous les λ_k se trouvent dans $[0, 1]$.

4. La fusion des descripteurs de saillance et de diffusion

L'idée principale de notre travail est d'utiliser simultanément et efficacement les deux descripteurs S_1 et S_2 , afin de profiter de leurs avantages, et donc les fusionner.

En fait, pour concevoir un système de fusion de descripteurs, il est très important de savoir quand, et comment combiner. Dans les dernières années, beaucoup de travaux ont été réalisés, mais le problème est toujours ouvert. Deux options de fusion s'offrent à nous : la fusion précoce, et la fusion tardive [SWS05].

La fusion tardive s'entraîne indépendamment sur les deux descripteurs, et les combine ensuite ; la fusion tardive est faite dans l'espace des descriptions. Dans notre application, pour deux modèles \mathcal{A} et \mathcal{B} , on calcule deux distances d_1 et d_2 entre leurs histogrammes selon les deux descripteurs S_1 et S_2 . Ensuite, les deux distances d_1 et d_2 sont combinées en une seule distance d .

Cependant, la fusion précoce peut être vue comme la prise en compte des avis de deux experts indépendants, ou comme la combinaison des résultats de deux appareils de mesure. Snoek et al. [SWS05] ont étudié la fusion précoce et la fusion tardive, et ils ont comparé les résultats de tests. Ils ont conclu que la fusion précoce donne de meilleurs résultats. On admet généralement que la fusion précoce est préférable pour combiner les deux descripteurs S_1 et S_2 au niveau de chaque sommet, en reconnaissance ou analyse de formes.

Dans la littérature, les règles les plus fréquemment utilisées sont celle du minimum, celle du maximum, celle de la combinaison linéaire, par exemple la moyenne, et celle du produit [Kun02].

En théorie, quand les deux descripteurs sont fiables, et indépendants – ou presque, la règle du produit est la meilleure. Nous avons testé et comparé toutes ces règles. Dans la section suivante, nous expliquerons la fusion précoce, et les différentes règles de fusion utilisées pour combiner des descripteurs.

4.1. Schémas de combinaison et fusion précoce

Les différentes règles de fusion mentionnées précédemment ont été étudiées et testées pour améliorer la précision de la classification de données. Ces règles sont importantes pour les méthodes de fusion classées comme des méthodes à base de règles [Kun02].

Le descripteur de saillance et la diffusion géométrique sont des descripteurs indépendants et complémentaires. Avant la fusion de ces deux descripteurs, il faut déterminer la précision de chaque descripteur.

Soient λ_1 et λ_2 la précision de S_1 et S_2 respectivement. λ_1 (respectivement λ_2) est calculée après une campagne de 100 tests. Nous cherchons dans le dépôt les formes les plus proches d'une requête, en utilisant le descripteur S_1 (respectivement S_2) ; λ_1 (respectivement λ_2) est la précision moyenne des résultats obtenus sur cent requêtes en utilisant le descripteur S_1 (respectivement S_2). Classiquement, la précision d'une requête est le nombre de formes correctes trouvées, divisé par le nombre total de formes trouvées, correctes ou erronées, pour cette requête.

$$\lambda_k = \text{precision}(S_k) = \frac{\text{Nombre de formes correctes par } S_k}{\text{Nombre total de formes trouvées}} \quad (14)$$

Par définition, les précisions, et leur moyenne, sont toujours comprises entre 0 et 1, et peuvent donc être interprétées comme des probabilités. Empiriquement, nous avons obtenu $\lambda_1 = 0.7498$, $\lambda_2 = 0.7975$.

En quel descripteur faisons-nous confiance au temps t peut être modélisé par une chaîne de Markov à deux états, S_1 et S_2 . Soit Z_t le numéro du descripteur en lequel nous avons confiance au temps t . Ainsi (Z_t) est une chaîne de Markov à deux états 1, 2 ou S_1, S_2 , et sa matrice de transition de probabilité est donnée par l'équation (15) :

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 - \lambda_1 \\ 1 - \lambda_2 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Cette chaîne de Markov a la distribution stationnaire de probabilités π^* , que nous calculons en résolvant $(I - M^T)\pi^* = 0$, et $\pi_1^* + \pi_2^* = 1$, donc $\pi_1^* = \frac{(1 - \lambda_2)}{(2 - (\lambda_1 + \lambda_2))}$ et $\pi_2^* = \frac{(1 - \lambda_1)}{(2 - (\lambda_1 + \lambda_2))}$. Soit $\alpha_1 = \pi_1^*$ la probabilité stationnaire de S_1 , et $\alpha_2 = \pi_2^*$ la probabilité stationnaire de S_2 .

Nous généralisons en annexe à un nombre quelconque D de descripteurs.

Définition 2 Soit α_k la probabilité stationnaire dans le descripteur S_k .

Nous présentons les règles de fusion précoce.

Max : C'est une des plus simples. $S(v_i) = \max(\alpha_1 \times S_1(v_i), \alpha_2 \times S_2(v_i))$.

Min : La règle de minimum est définie de la même façon. $S(v_i) = \min(\alpha_1 \times S_1(v_i), \alpha_2 \times S_2(v_i))$.

Linéaire : Dans ce cas, la règle de fusion est donnée par la combinaison linéaire. $S(v_i) = \alpha_1 \times S_1(v_i) + \alpha_2 \times S_2(v_i)$.

Produit : la règle de produit est la règle la plus simple parmi les règles de fusion [AVW09, TDB97], les deux descripteurs sont multipliés. $S = (\alpha_1 \times S_1) \times (\alpha_2 \times S_2) = \alpha_1 \times \alpha_2 \times S_1 \times S_2$.

La règle du produit est très sensible aux valeurs incorrectes des descripteurs : une valeur minuscule pour S_1 ou S_2 conduira à une valeur minuscule pour S . Mais, dans notre cas, les deux descripteurs sont fiables, et indépendants. La règle du produit est théoriquement la meilleure dans ce cas. C'est confirmé par nos expériences, comme le montre la figure 8 (b).

4.2. Le descripteur PSDF

Cette section présente le descripteur PSDF : S . Il permet d'apparier, de retrouver et de discriminer de façon robuste des formes, rigides ou non. Pour chaque sommet v_i du maillage, nous calculons $S_1(v_i)$ et $S_2(v_i)$. Le descripteur PSDF pour v_i est obtenu en utilisant la règle du produit définie en section 4.1 : $\alpha \times (1 - \alpha) \times S_1 \times S_2$. Les descripteurs S_1 , S_2 , et S peuvent être considérés comme un degré d'appartenance à un ensemble flou (*soft label*).

Une remarque importante est que $S(v_i) = \prod_{k=1}^L \alpha_k \times S_k(v_i)$ est égal à une constante multiplicative près à S_1 fois S_2 . Cette constante ne dépend pas des formes considérées, et peut être éliminée car elle n'affecte pas les distances relatives entre les histogrammes. Le descripteur S est donc donné par la formule très simple du produit : $S(v_i) = S_1(v_i)S_2(v_i)$. Il est donc inutile de calculer les probabilités stationnaires α_1 et α_2 pour le descripteur PSDF. Il faut cependant les calculer pour les autres règles de fusion.

La figure 9 montre les résultats obtenus en appliquant le descripteur PSDF à différentes formes.

L'algorithme 1 résume les différentes étapes de notre logiciel d'appariement.

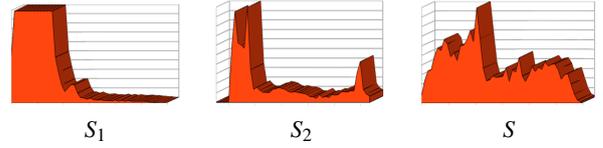


Figure 4: Résultats de différents descripteurs et leurs histogrammes. A gauche : descripteur de saillance. Milieu : descripteur de diffusion. A droite : La fusion des deux descripteurs (PSDF).

4.3. Distributions et histogrammes

Pour une forme donnée, chacun de ses sommets est donc associé à un descripteur, parmi S_1 , S_2 , $D2$, GPS , TD . Comment utiliser ces vecteurs (à raison d'un vecteur par forme) pour calculer une distance, ou une ressemblance, entre deux formes ? Le plus simple est de ne garder de chaque vecteur qu'une distribution, et, plus concrètement, un histogramme.

Pour convertir le vecteur en histogramme, nous fixons le nombre b de tiroirs de l'histogramme. Classiquement, b doit être de l'ordre de la racine carrée de n , le nombre de sommets des maillages. Dans nos dépôts, n varie entre 3000 et 5000, et nous avons utilisé $b = 50$. Les descripteurs d'une forme sont normalisés (si le descripteur est $D2$, TD ou GPS) pour que toutes les valeurs des descripteurs soient dans $[0, 1]$. Alors H_i est défini par :

$$H(i) = \frac{m_i}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, b-1. \quad (16)$$

où m_i est le nombre de sommets du maillage considéré dont la valeur du descripteur est comprise dans l'intervalle $[i/b, (i+1)/b]$. La figure 4 montre les histogrammes de Victoria, en utilisant divers descripteurs.

Pour calculer la distance entre deux formes, il faut d'abord calculer leurs histogrammes, puis calculer une distance, ou une similarité, entre leurs histogrammes. Plusieurs mesures de similarités existent. Mentionnons la divergence de Kullback-Leibler, la distance de Hellinger, la distance de Bhattacharyya, le coût du transport optimal, etc. Nous avons systématiquement utilisé la distance du χ^2 .

Soit H_1 l'histogramme d'une forme F_1 , et H_2 l'histogramme d'une forme F_2 . La distance entre F_1 et F_2 est la mesure du χ^2 entre H_1 et H_2 , soit :

$$d(H_1||H_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{b-1} \frac{(H_1(i) - H_2(i))^2}{(H_1(i) + H_2(i))} = \chi^2(H_1, H_2) \quad (17)$$

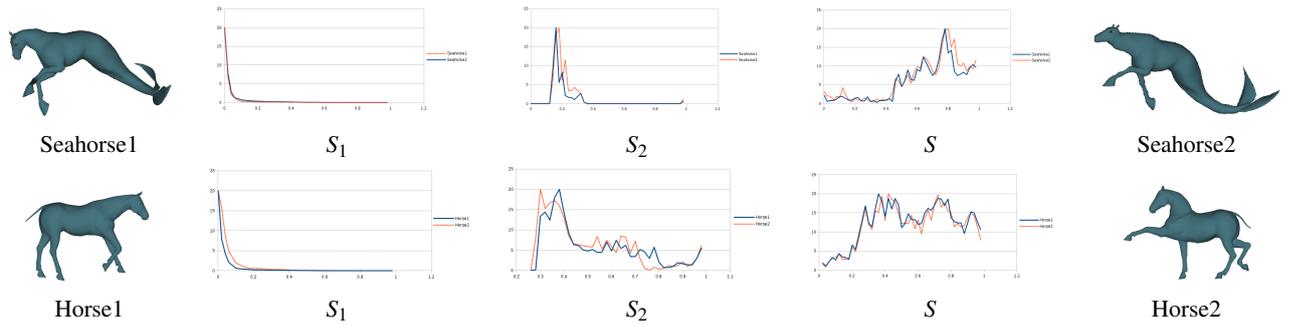


Figure 5: Comparaison des histogrammes des différentes postures de deux catégories d'objets calculés en utilisant les descripteurs S_1 , S_2 , S .

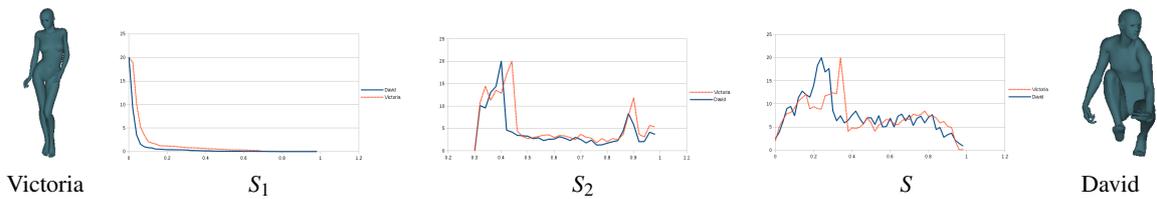


Figure 6: Comparaison entre les histogrammes de Victoria et ceux de David calculés en utilisant les descripteurs S_1 , S_2 , et S

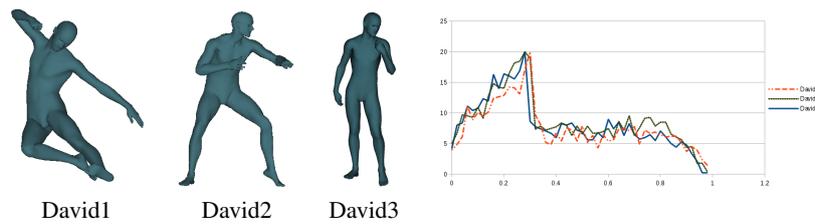


Figure 7: Histogrammes de différents objets appartenant à la même catégorie calculés en utilisant le descripteur PSDF.

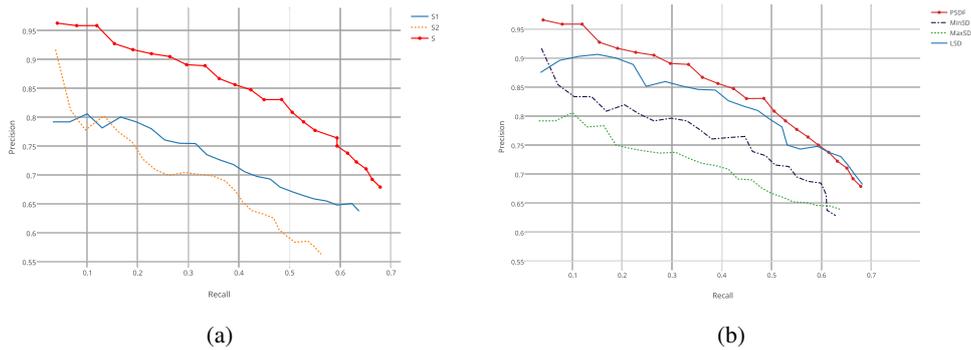


Figure 8: Courbe de rappel/précision. (a) : résultats des descripteurs S_1 , S_2 , S appliqués sur différents objets de la base de données [YMB07]. (b) : résultats utilisant différentes les règles de fusion pour combiner S_1 et S_2 .

Algorithm 1 Algorithme d'appariement et de classification PSDF.

```

1: Entrées : un modèle donné (requête  $Q$ ), et une base de
   données  $\mathcal{E}$ 
2: procedure PSDF-FUSION(un maillage  $\mathcal{M}$ );
3:   for Chaque sommet  $v_i \in \mathcal{M}$  do
4:     calculer le descripteur de saillance  $S_1(v_i)$ ;
5:     calculer le descripteur de diffusion  $S_2(v_i)$ ;
6:     fusionner les deux descripteurs  $S(v_i)=S_1(v_i) \times$ 
        $S_2(v_i)$ ;
7:   end for
8:   Retourner  $S(\mathcal{M})$  sous forme de tableau (vecteur);
9: end procedure
10: PSDF-Fusion( $Q$ );
11: for chaque maillage  $Q' \in$  la base de données  $\mathcal{E}$  do
12:   PSDF-Fusion( $Q'$ );
13:   calculer les histogrammes  $H(Q)$  et  $H(Q')$ ;
14:   calculer  $\chi^2(H(Q), H(Q'))$ ;
15: end for
16: sélectionner les objets pertinents;
  
```

5. Résultats expérimentaux

Dans cette section, nous discutons les résultats obtenus en utilisant les descripteurs de formes proposés pour appairer des objets 3D.

Notre application consiste à trouver les formes dans une base de données qui ressemblent le plus à une forme requise : la requête. Nous sélectionnons les K' – modèles les plus proches.

La performance des résultats de recherches est évaluée en utilisant la mesure précision et rappel, en considérant les mesures *First Tier* (FT) et *Second Tier* (ST) [HSA*09]. Pour chaque mesure, on calcule le score moyen par catégorie, ainsi que pour toute la base de données.

- **Précision** : est le nombre de modèles pertinents par rapport aux K' – modèles retrouvés.
- **Rappel** : est le nombre de modèles pertinents dans les K' – modèles retrouvés par rapport à tous les modèles pertinents présents dans la base de données.

Pour *First-tier* $K' = |Q| - 1$, et pour *Second-tier* $K' = 2 \times (|Q| - 1)$, sachant que $|Q|$ représente le nombre de modèles de la catégorie contenant la requête.

Pour montrer la fiabilité de notre méthode, dans un premier temps, nous comparons ceux obtenus en utilisant PSDF avec les résultats obtenus en utilisant les descripteurs de saillance et de diffusion, et dans un deuxième temps ceux obtenus en utilisant les différents schémas de fusion, et finalement nous comparons nos résultats avec d'autres méthodes.

Dans ce travail, nous avons utilisé une base de données contenant des modèles non rigides [YMB07]. La base de données contient 148 modèles représentés sous forme de

maillage triangulaire, et distribués en 10 différentes catégories, contenant chacune des modèles avec une variété de poses (eg. Cats, Centaurs, Dogs, Wolves, Horses, Lions, Gorillas, Shark, Female and Male figures). Chaque modèle contient approximativement 3400 sommets.

Nous avons aussi utilisé d'autres modèles de différentes bases de données [SP04, SZM*08, BVLD09] pour mettre en œuvre les différents algorithmes présentés dans les sections précédentes.

Dans la première partie de notre travail, nous avons comparé les résultats d'appariement d'objets en utilisant les descripteurs de formes S_1 , S_2 , et PSDF.

La Figure 5 illustre les résultats d'appariement pour des modèles de deux différentes catégories avec différentes postures. Les graphiques (a) and (b) représentent les histogrammes des modèles calculés en utilisant respectivement le descripteur de saillance (ou le descripteur de diffusion), et leur fusion PSDF.

On peut constater que les graphiques sont mieux alignés avec PSDF qu'avec les deux autres descripteurs. Un autre exemple représentant un modèle (David) dans différentes positions montre que les trois histogrammes calculés en utilisant PSDF sont pratiquement similaires.

La Figure 11 représente des résultats de recherche pour quelques modèles utilisant les différents descripteurs. Nous sélectionnons les 9 modèles les plus similaires par rapport à la requête, les faux résultats sont encadrés en rouge.

En se basant sur les résultats représentés dans la Figure 11, on peut clairement déduire que PSDF permet d'améliorer les résultats de recherche. Tous les 9 modèles correspondant aux résultats de recherche dans l'exemple utilisant PSDF sont des objets pertinents.

Un autre avantage de PSDF, est qu'il distingue les modèles Femmes (Victoria) des modèles Hommes (David). À partir de la Figure 6, même si les histogrammes représentant les modèles Victoria et David ont pratiquement la même forme, les histogrammes calculés utilisant PSDF sont plus discriminants que ceux calculés utilisant S_2 .

Le tableau 1 représente la précision des résultats de recherches pour différentes catégories de modèles de la base de données, et en terme de différents descripteurs.

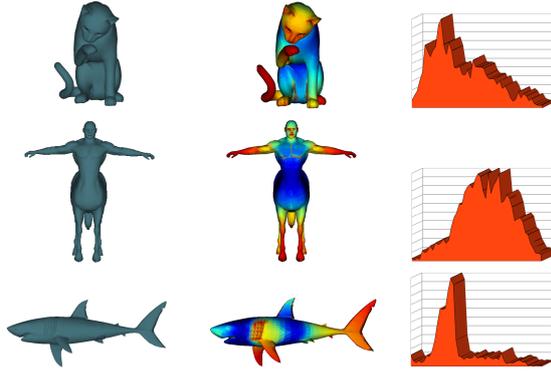


Figure 9: Résultats du descripteur PSDF. A gauche : le modèle original. Milieu : la carte de couleurs des valeurs associées aux sommets en utilisant PSDF. A droite : Les histogrammes correspondants.

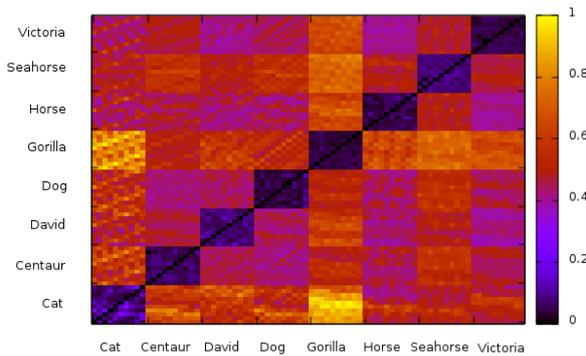


Figure 10: La matrice de distance : distances entre tous les modèles de la base de données. Les couleurs claires indiquent la dissemblance entre les objets.

A partir des résultats du tableau 6, ainsi que les courbes de rappel/précision de différents descripteurs dans la Figure 8-(a), l'efficacité du descripteur PSDF est confirmée par rapport aux descripteurs de saillance et de diffusion.

En outre, à partir de la Figure 8-(b), on peut conclure que la règle du produit utilisée pour la fusion est plus efficace que les autres règles.

La seconde partie de nos expériences consiste à déterminer la capacité de notre méthode à distinguer entre les différents modèles de la base de données lors de la recherche. La Figure 12 illustre les histogrammes de différents modèles appartenant à des catégories différentes de la base de données. On peut bien constater que les histogrammes sont clairement différents, par conséquent les objets qu'ils représentent aussi.

Par ailleurs, la matrice des distances entre tous les modèles de la base de données représentée dans la Figure 10 confirme la robustesse de notre méthode.

Les éléments de la diagonale représentent les objets appartenant à la même catégorie, leurs valeurs de dissimilarité sont très petites comparées aux autres objets représentés par les autres éléments de la matrice dont la dissimilarité est considérable.

Pour montrer l'efficacité de notre méthode, nous avons comparé nos résultats avec ceux d'autres méthodes appliquées sur le même jeu de données. Les méthodes que nous avons utilisées dans la comparaison sont basées sur le même principe utilisé pour représenter et décrire les objets : D2 [OFCD01], GPS [MJL08], et TD [FSK11].

Les résultats de différentes méthodes, ainsi que de notre méthode, sont résumés par la Figure 13 et le Tableau 2.

A partir des informations extraites des courbes de rappel/précision dans la Figure 13, et des tableaux 6, et 2, on peut voir que notre méthode donne des résultats meilleurs que les autres méthodes.

6. Conclusion

Dans cet article nous avons présenté un nouveau descripteur de forme appelé PSDF basé sur la fusion de deux descripteurs, un descripteur local (descripteur de saillance), et un descripteur global (diffusion), ce qui permet de bénéficier de leurs avantages.

Le descripteur de saillance prend en compte l'information locale du maillage dans le voisinage de chaque nœud. Par ailleurs, le descripteur de diffusion représente une information globale.

La fusion des descripteurs est un moyen efficace permettant de combiner l'information locale, et globale ce qui permet de mieux représenter les formes, et assure l'invariance aux changements de postures, et aux changements de la topologie.

Nous avons testé le descripteur PSDF sur différents objets 3D. Les résultats montrent que PSDF est plus efficace que les deux autres descripteurs utilisés séparément, ainsi que ceux des méthodes classiques : D2, GPS, TD.

7. Annexe

Dans cet annexe, nous décrivons les règles de fusion appliquées à un nombre quelconque L de descripteurs. Nous pouvons généraliser le calcul de la précision et la chaîne de Markov correspondante pour L descripteurs.

Soit μ_i précision du i^{ieme} descripteur. Nous supposons que la probabilité de transition d'un descripteur à un autre est équiprobable. Donc, la probabilité de passer du i^{ieme} descripteur au temps $t = 0$ au j^{ieme} descripteur au temps $t = 1$

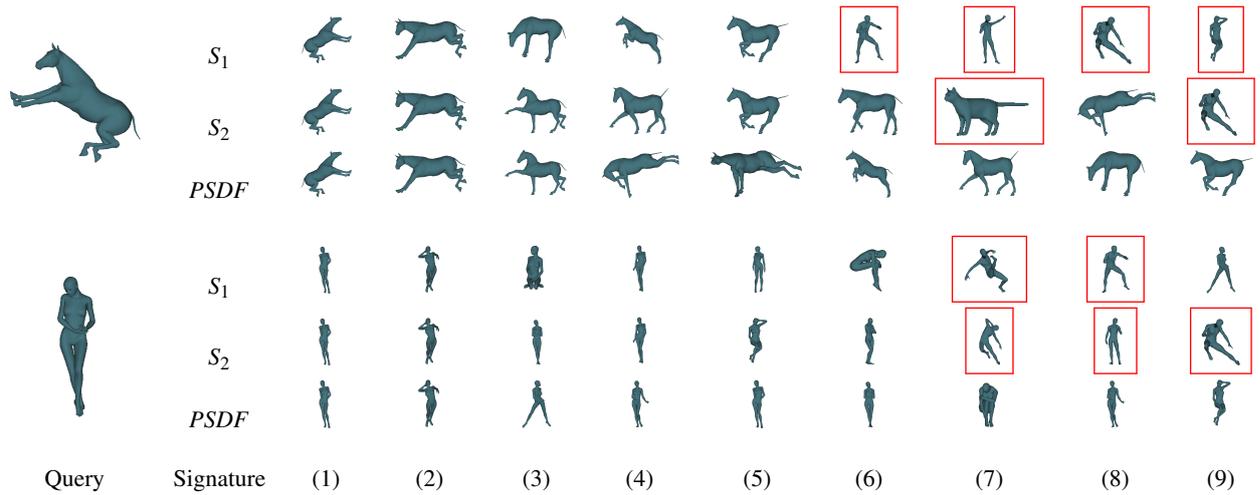


Figure 11: Les résultats de classification en utilisant S_1 , S_2 , et PSDF. Colonne 1 : requête. Colonne i : les modèles les plus similaires triés par distances croissantes à la requête.

Table 1: La précision de la recherche en utilisant les descripteurs proposés.

Models	Precision (%)					
	First-tier (FT)			Second-tier (ST)		
	S_1	S_2	PSDF	S_1	S_2	PSDF
Cat	56.060%	60.6061%	85.606%	30.769%	26.282%	37.179%
Centaur	95.454%	83.333%	100%	49.242%	53.030%	54.545%
David	76.623%	81.039%	86.753%	44.285%	51.4706%	52.672%
Horse	80.748%	98.395%	99.465%	39.379%	46.732%	46.895%
Seahorse	100%	96.530%	100.00%	54.166%	54.166%	55.166%
Victoria	80.303%	77.651%	88.636%	48.350%	48.090%	47.309%
Dog	37.777%	65.444%	67.777%	43.209%	44.444%	48.765%
Gorilla	72.923%	75.041%	83.128%	51.111%	50.555%	55.555%
All	74.986%	79.754%	88.920%	45.063%	43.181%	49.760%

Table 2: Précision de la recherche utilisant d'autres méthodes.

Models	Precision (%)					
	First-tier (FT)			Second-tier (ST)		
	D2	GPS	TD	D2	GPS	TD
Cat	29.166%	62.424%	84.969%	17.628%	21.794%	25.641%
Centaur	31.944%	78.787%	78.789%	26.515%	42.424%	43.9394%
David	39.183%	65.974%	70.909%	30.050%	44.663%	46.5546%
Horse	32.507%	93.582%	99.465%	23.366%	44.6078%	46.8954%
Seahorse	56.804%	100%	100%	40.705%	54.1667%	54.1667%
Victoria	42.166%	73.106%	71.969%	33.506%	43.6632%	43.75%
Dog	30%	70.707%	86.425%	24.074%	46.9136%	50%
Gorilla	29%	60.909%	81.181%	25%	47.2222%	54.4444%
All	36.346%	75.686%	84.293%	27.605%	43.181%	45.673%

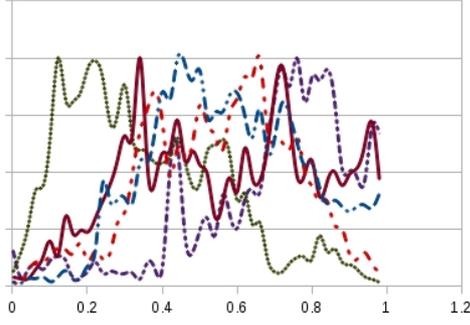


Figure 12: Les histogrammes d'une variété de modèles 3D calculés en utilisant PSDF.

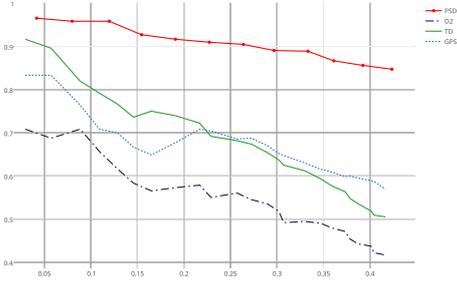


Figure 13: Comparaison de notre méthode avec d'autres méthodes. PSDF : notre méthode basée sur la fusion des descripteurs. GPS : The Global Point Signature [MJL08]. D2 : distribution de distances Euclidiennes entre les sommets [OFCD01]. TD : distribution de chaleur [FSK11].

est donnée par :

$$P_{ij} = \Pr(Z_1 = j | Z_0 = i) = \begin{cases} \mu_i & \text{Si } i = j \\ \frac{1-\mu_i}{L-1}, & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

Par conséquent, la matrice stochastique M représentant les probabilités de transitions est donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1L} \\ p_{21} & \dots & p_{2L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{L1} & \dots & p_{LL} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Où : $M(i, j) = p_{ij} = \Pr(Z_1 = j | Z_0 = i)$, $0 < \mu_i < 1$, et $0 < \frac{1-\mu_i}{L-1} < 1$, pour $i = 1, \dots, L$. M est bien stochastique.

Cette chaîne de Markov admet une distribution stationnaire unique π^* qui peut être trouvée en résolvant le système : $(I - M^T)\pi^* = 0$, et $\sum_{j=1}^L \pi_j^* = 1$. Le vecteur de probabilité stationnaire est alors défini par $\pi^* = (\pi_1^*, \dots, \pi_L^*)$, et la proba-

bilité stationnaire π_i^* du i^{ieme} descripteur est donnée par :

$$\pi_i^* = \frac{1 - \left(\sum_{j=1, j \neq i}^L \mu_j / (L-1) \right)}{L - \sum_{j=1}^L \mu_j} \quad (19)$$

Finalement, les règles de fusion pour L descripteurs sont définies comme suit :

Max : La règle de maximum pour L descripteurs est donnée par : $S = \max\{\alpha_k \times S_k, k = 1, \dots, L\}$.

Min : La règle de minimum pour L descripteurs est donnée par : $S = \min\{\alpha_k \times S_k, k = 1, \dots, L\}$.

Linéaire : La fusion linéaire de L descripteurs est définie par : $S = \sum_{k=1}^L \alpha_k \times S_k$.

Produit : La règle de produit pour L descripteurs est donnée par : $S = \prod_{k=1}^L \alpha_k \times S_k = \left(\prod_{k=1}^L \alpha_k \right) \times \left(\prod_{k=1}^L S_k \right)$

Références

- [AMSF11] ATTENE M., MARINI S., SPAGNUOLO M., FALCIDIENO B. : Part-in-whole 3d shape matching and docking. *Vis. Comput.* Vol. 27, Num. 11 (nov 2011), 991–1004.
- [AVW09] ABDULLAH A., VELTKAMP R., WIERING M. : An ensemble of deep support vector machines for image categorization. In *Soft Computing and Pattern Recognition, 2009. SOCPAR '09. International Conference of* (Dec 2009), pp. 301–306.
- [BVL09] BENHABILES H., VANDEBORRE J.-P., LAVOUE G., DAOUDI M. : A framework for the objective evaluation of segmentation algorithms using a ground-truth of human segmented 3d-models. In *Shape Modeling and Applications, 2009. SMI 2009. IEEE International Conference on* (June 2009), pp. 36–43.
- [CCM*13] CHENG Z.-Q., CHEN Y., MARTIN R., LAI Y.-K., WANG A. : Supermatching : Feature matching using supersymmetric geometric constraints. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*. Vol. 19, Num. 11 (Nov 2013), 1885–1894.
- [CK11] CHANG M.-C., KIMIA B. B. : Measuring 3d shape similarity by graph-based matching of the medial scaffolds. *Computer Vision and Image Understanding*. Vol. 115, Num. 5 (2011), 707 – 720. Special issue on 3D Imaging and Modelling.
- [CLCL11] CHAO M.-W., LIN C.-H., CHANG C.-C., LEE T.-Y. : A graph-based shape matching scheme for 3d articulated objects. *Computer Animation and Virtual Worlds*. Vol. 22, Num. 2-3 (2011), 295–305.

- [CO02] CHEN D.-Y., OUYOUNG M. : A 3d object retrieval system based on multi-resolution reeb graph. *Computers and Graphics* (2002).
- [FSK11] FANG Y., SUN M., K. R. : Temperature distribution descriptor for robust 3d shape retrieval. In *Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW), 2011 IEEE Computer Society Conference on* (June 2011), pp. 9–16.
- [Gal12] GALVEZ J. : A graph-theoretical approach to calculate vibrational energies of atomic and subatomic systems. *Open Journal of Physical Chemistry. Vol. 2*, Num. 4 (2012), 204–211.
- [GCO06] GAL R., COHEN-OR D. : Salient geometric features for partial shape matching and similarity. *ACM Trans. Graph. Vol. 25*, Num. 1 (jan 2006), 130–150.
- [HH09] HU J., HUA J. : Salient spectral geometric features for shape matching and retrieval. *Vis. Comput.. Vol. 25*, Num. 5-7 (apr 2009), 667–675.
- [HSA*09] HARTVELDT J., SPAGNUOLO M., AXENOPOULOS A., BIASOTTI S., DARAS P., DUTAGACI H., FURUYA T., GODIL A., LI X., MADEMLIS A., ET AL. : Shrec09 track : Structural shape retrieval on watertight models. In *3DOR* (2009), pp. 77–83.
- [Kun02] KUNCHEVA L. I. : A theoretical study on six classifier fusion strategies. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.. Vol. 24*, Num. 2 (2002), 281–286.
- [MH12] MOHAMED W., HAMZA A. B. : Reeb graph path dissimilarity for 3d object matching and retrieval. *The Visual Computer. Vol. 28*, Num. 3 (2012), 305–318.
- [MJL08] MAK S. O., JIAN S., LEONIDAS G. : Global intrinsic symmetries of shapes. In *Proceedings of the Symposium on Geometry Processing* (Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2008), Eurographics Association, pp. 1341–1348.
- [MS09] MAHMOUDI M., SAPIRO G. : Three-dimensional point cloud recognition via distributions of geometric distances. *Graphical Models. Vol. 71*, Num. 1 (2009), 22 – 31.
- [NLCK05] NADLER B., LAFON S., COIFMAN R. R., KEVREKIDIS I. G. : Diffusion maps, spectral clustering and eigenfunctions of fokker-planck operators. In *Advances in Neural Information Processing Systems 18* (2005), MIT Press, pp. 955–962.
- [OFCD01] OSADA R., FUNKHOUSER T., CHAZELLE B., DOBKIN D. : Matching 3d models with shape distributions. In *Shape Modeling and Applications, SMI 2001 International Conference on*. (May 2001), pp. 154–166.
- [RLa05] R. C., LAFON, ALL : Geometric diffusions as a tool for harmonic analysis and structure definition of data : Diffusion maps. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. Vol. 102*, Num. 21 (2005), 7426–7431.
- [Sci12] SCILAB ENTERPRISES : *Scilab : Le logiciel open source gratuit de calcul numérique*. Scilab Enterprises, Orsay, France, 2012.
- [SP04] SUMNER R. W., POPOVIĆ J. : Deformation transfer for triangle meshes. *ACM Trans. Graph.. Vol. 23*, Num. 3 (2004), 399–405.
- [SSGD03] SUNDAR H., SILVER D., GAGVANI N., DICKINSON S. : Skeleton based shape matching and retrieval. In *Proceedings of the Shape Modeling International 2003* (Washington, DC, USA, 2003), SMI '03, IEEE Computer Society, p. 130.
- [SWS05] SNOEK C. G. M., WORRING M., SMEULDERS A. W. M. : Early versus late fusion in semantic video analysis. In *Proceedings of the 13th Annual ACM International Conference on Multimedia* (2005), MULTIMEDIA 05, pp. 399–402.
- [SZM*08] SIDDIQI K., ZHANG J., MACRINI D., SHOKOUFANDEH A., BOUIX S., DICKINSON S. : Retrieving articulated 3-d models using medial surfaces. *Mach. Vision Appl.. Vol. 19*, Num. 4 (may 2008), 261–275.
- [TCDV10] TABIA H., COLOT O., DAOUDI M., VANDEBORRE J.-P. : 3d-shape retrieval using curves and hmm. In *Proceedings of the 2010 20th International Conference on Pattern Recognition* (Washington, DC, USA, 2010), ICPR '10, IEEE Computer Society, pp. 3147–3150.
- [TCF09] TOLDO R., CASTELLANI U., FUSIELLO A. : Visual vocabulary signature for 3d object retrieval and partial matching. In *Proceedings of the 2Nd Eurographics Conference on 3D Object Retrieval* (Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2009), EG 3DOR'09, Eurographics Association, pp. 21–28.
- [TDB97] TAX D. M., DUIN R. P., BREUKELN M. V. : Comparison between product and mean classifier combination rules. In *In Proc. Workshop on Statistical Pattern Recognition* (1997), pp. 165–170.
- [TDVC11] TABIA H., DAOUDI M., VANDEBORRE J.-P., COLOT O. : A new 3d-matching method of nonrigid and partially similar models using curve analysis. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on. Vol. 33*, Num. 4 (April 2011), 852–858.
- [VH01] VELTKAMP R. C., HAGEDOORN M. : Principles of visual information retrieval. Springer-Verlag, London, UK, UK, 2001, ch. State of the Art in Shape Matching, pp. 87–119.
- [YMB07] YA. M. BRONSTEIN M. M. BRONSTEIN R. K. : Calculus of nonrigid surfaces for geometry and texture manipulation. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on. Vol. 13/5* (2007), 902–913.